

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Радиофизический факультет

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ
ИНТЕГРАЛОВ
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

ГОРЬКИЙ, 1989

УДК 610

Вычисление несобственных интегралов на основе теории вычетов.

Методическая разработка для студентов дневного и вечернего отделения радиофизического факультета ГГУ.

Учебная специальность - 0704 - радиофизика, Горький, изд.ГГУ им.Н.И.Лобачевского, 1989г.

Рассмотрены основные положения теории вычетов и её применение к вычислению несобственных интегралов определенных классов. Выведены формулы для вычисления интегралов, указаны достаточные условия их использования. Разобраны примеры вычисления вычетов и интегралов в различных случаях. Приведены задания для самостоятельной работы.

Методическая разработка предназначена для студентов 1-го и 2-го курсов дневного и вечернего отделения радиофизического факультета. Может быть использована при проведении практических занятий и контрольных работ.

Составители: Гусев Вячеслав Александрович
Афрамович Валентин Сендерович
Щемелев Евгений Георгиевич

1. ВЫЧЕТЫ

1.1. Определение вычета в конечной изолированной особой точке.

Пусть $a \neq \infty$ изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$. Тогда, по определению изолированной особой точки, существует кольцевая окрестность K :

$0 < |z-a| < r$ точки a , в которой функция $f(z)$ аналитична.

Определение 1. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $a \neq \infty$ называется число, обозначаемое согласно [2] выражением $[f(z), a]$ и определяемое по формуле

$$\text{Выч}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} f(z) dz, \quad (1)$$

где C_p — окружность $|z-a|=p$, $0 < p < r$, с положительным направлением обхода.

По интегральной теореме Коши значение интеграла в формуле (1) не изменится, если окружность C_p заменить любым замкнутым контуром C , лежащим в кольце K и окружающим точку a . Значит

$$\text{Выч}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

причем интегрирование ведется по контуру C в положительном направлении (точка a при обходе остается слева).

По теореме Лорана функция $f(z)$ в кольце K представима рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k,$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

откуда, в частности

- 4 -

$$\mathcal{C}_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} f(z) dz. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), приходим к выводу, что

$$\text{выч}[f(z), a] = \mathcal{C}_{-1}, \quad (3)$$

т.е. вычет равен коэффициенту при первой отрицательной степени ряда Лорана, представляющего функцию в окрестности особой точки $a \neq \infty$.

Предположим, что точка $a \neq \infty$ является полюсом m -го порядка функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид.

$$f(z) = C_{-m}(z-a)^{-m} + \dots + C_{-1}(z-a)^{-1} + C_0 + C_1(z-a) + \dots,$$

$C_{-m} \neq 0$. Умножая ряд на $(z-a)^m$, получим

$$(z-a)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-a) + \dots + C_{-1}(z-a)^{m-1} + C_0(z-a)^m + \dots$$

Продифференцировав степенной ряд почленно $(m-1)$ раз и перейдя к пределу при $z \rightarrow a$, находим

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] = (m-1)! C_{-1}.$$

Отсюда получаем формулу для определения вычета (3), если

$a \neq \infty$ — полюс m -го порядка:

$$\text{выч}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]. \quad (4)$$

В частности для полюса 1-го порядка формула (4) принимает вид

$$\text{выч} [f(z), a] = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)], \quad (5)$$

Если функция, для которой точка a - полюс 1-го порядка, представлена в виде отношения:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ - аналитические функции, причем $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то пользуясь формулой (5), находим

$$\text{выч} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, a \right] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

$$\text{т.е.} \quad \text{выч} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}, a \right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (6)$$

Пример 1. Найдем вычет функции $f(z) = z^3 \cdot \cos \frac{1}{z-2}$

в изолированной особой точке $z=2$. Представим

z^3 по степеням $z-2$:

$$z^3 = [2 + (z-2)]^3 = 8 + 12(z-2) + 6(z-2)^2 + (z-2)^3$$

и запишем ряд

$$\cos \frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} - \dots,$$

который сходится при $0 < |z-2| < \infty$.

Выполнив почленное умножение, получим коэффициент

C_{-1} при $(z-2)^{-1}$:

$$C_{-1} = 12 \left(-\frac{1}{2!} \right) + \frac{1}{4!} = -\frac{143}{24}.$$

Тогда по формуле (3) находим

$$\text{выч} \left[z^3 \cdot \cos \frac{1}{z-2} \right] = C_{-1} = -\frac{143}{24}$$

Пример 2. Определим вычет функции $f(z) = \frac{e^z}{1-e^z}$

в изолированных точках $z_k = 2\pi ki$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Обозначим $\varphi(z) = e^z$, $\psi(z) = 1 - e^z$. Тогда

$$\varphi(2\pi ki) = e^{2\pi ki} = 1 \neq 0; \quad \psi(2\pi ki) = 0; \quad \text{но}$$

$$\varphi'(2\pi ki) = -e^{2\pi ki} = -1 \neq 0.$$

Следовательно точки z_k являются полюсами первого порядка функции

$$f(z) = \frac{e^z}{1-e^z}.$$

Тогда по формуле (6), получаем

$$\text{выч} \left[\frac{e^z}{1-e^z}, 2\pi ki \right] = \frac{e^{2\pi ki}}{-e^{2\pi ki}} = -1, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Замечание 1. Порядок нуля $z=a$ функции $\psi(z)$ равен порядку полюса функции $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ при условии, что $\varphi(a) \neq 0$. Порядок нуля можно определить так: если

$$\psi(a) = \psi'(a) = \dots = \psi^{(k-1)}(a) = 0, \quad \text{а} \quad \psi^{(k)}(a) \neq 0,$$

то $z=a$ - нуль k -го порядка функции $\psi(z)$.

Пример 3. Найдем вычет функции $f(z) = \frac{\cos 2z}{(z-1)^3}$ в точке $z=1$. Эта точка является полюсом 3-го порядка, поэтому по формуле (4) получим

$$\begin{aligned} \text{выч} \left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}, 1 \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^3 \frac{\cos 2z}{(z-1)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (-4 \cos 2z) = -2 \cos 2. \end{aligned}$$

1.2. Определение вычета в бесконечно удаленной точке.

Пусть $Z = \infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$. Тогда по определению изолированной особой точки существует кольцевая окрестность $K: R < |z| < \infty$ точки $Z = \infty$, в которой $f(z)$ аналитическая.

Определение 2. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $Z = \infty$ называется число

$$\text{Выч}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z) dz, \quad (7)$$

где C_R — окружность $|z| = R$, $R < R < +\infty$, с отрицательным направлением обхода относительно начала координат $Z = 0$ (относительно точки $Z = \infty$ направление обхода будет положительным).

По теореме Лорана в кольце $R < |z| < \infty$ функция $f(z)$ представляется рядом

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k z^k,$$

в котором коэффициенты C_k определяются по формуле

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

в частности

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z) dz = - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z) dz. \quad (8)$$

Сравнивая формулы (7) и (8), находим

$$\text{Выч}[f(z), \infty] = -C_{-1},$$

где C_{-1} — коэффициент при Z^{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в кольце $R < |z| < \infty$ точки $Z = \infty$.

Замечание 2.

Замена $Z = 1/z'$ переводит изолированную особую точку $Z = \infty$ функции $f(z)$ в изолированную конечную особую точку $Z' = 0$ функции $g(z') = f(1/z')$. При этом характер особой точки не меняется. Ясно, что

- 8 -

Выч $[f(z), \infty]$ будет равен коэффициенту с обратным знаком при z' в разложении $g(z')$ в ряд Лорана в окрестности $z' = 0$. В частности, если $z' = 0$ является полюсом m -го порядка функции $g(z')$, то

$$\text{Выч}[f(z), \infty] = -\lim_{z' \rightarrow 0} \frac{1}{(m+1)!} \frac{d^{m+1}}{dz'^{m+1}} \left[z'^m f\left(\frac{1}{z'}\right) \right]. \quad (9)$$

Если $z' = 0$ устранимая особая точка $g(z')$, то $m = 0$ и

$$\text{Выч}[f(z), \infty] = -\lim_{z' \rightarrow 0} \frac{d}{dz'} f\left(\frac{1}{z'}\right).$$

Пример 4. Найдем вычет функции $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$ в бесконечно удаленной точке. После замены $z = 1/z'$, получим функцию $g(z') = \frac{z'}{z'(1+z')} = \frac{1}{1+z'}$, для которой $z' = 0$ является простым полюсом. По формуле (9) при $m = 1$ вычислим $\text{Выч}[f(z), \infty]$:

$$\text{Выч}[f(z), \infty] = -\lim_{z' \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz'^2} \frac{z'}{z'(1+z')} = -\lim_{z' \rightarrow 0} (1+z')^{-3} = -1.$$

Пример 5. Функция $f(z) = z^{-3} e^z$ имеет две изолированные особые точки: $z_1 = 0$ и $z_2 = \infty$. В кольце $0 < |z| < \infty$ функция $f(z) = z^{-3} e^z$ аналитическая и представляется рядом Лорана:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} z + \dots$$

Отсюда следует, что

$$\text{Выч}[f(z), 0] = \frac{1}{2}, \quad \text{выч}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2}.$$

1.3. Теоремы о вычетах

Теорема 1 (основная). Пусть D — односвязная

область, ограниченная кусочно-гладкой кривой C , а функция $f(z)$ – аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D} = D \cup C$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$, $k=1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{выч}[f(z), a_k] \quad (10)$$

Теорема 2 (о сумме вычетов). Если функция $f(z)$ аналитическая на комплексной плоскости всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек a_1, a_2, \dots, a_n , то

$$\sum_{k=1}^n \text{выч}[f(z), a_k] + \text{выч}[f(z), \infty] = 0 \quad (11)$$

Пример 6. Для функции $f(z) = (4z^2 - 2z + 3)/((z-2)(z^2+1))$ использование формулы (11) при $a_1 = 2$, $a_2 = i$, $a_3 = -i$ дает

$$\text{выч}[f(z), \infty] = - \sum_{k=1}^3 \text{выч}[f(z), a_k]$$

По формуле (6) находим

$$\text{выч}[f(z), a_1] = \frac{4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 1} = \frac{15}{5} = 3 ;$$

$$\text{выч}[f(z), a_2] = \frac{4 \cdot i^2 - 2i + 3}{(i-2) \cdot 2i} = \frac{1}{2} ;$$

$$\text{выч}[f(z), a_3] = \frac{4i^2 + 2i + 3}{(-i-2)(-2i)} = \frac{1}{2}$$

Итак, получим

$$\text{выч}[f(z), \infty] = -4 .$$

Пример 7. Найдем интеграл

$$\int_C \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}, \text{ где } C \text{ – окружность: } |z-2|=0,5$$

Так как в круге $|z-2| \leq 0,5$ есть только одна особая точка $z=2$, которая является полюсом второго порядка для подынтегральной функции, то по формулам (10) и (4), получим

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2} &= 2\pi i \operatorname{Выч} \left[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}, 2 \right] = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = 2\pi i \frac{-1}{(z-1)^2} \Big|_{z=2} = -2\pi i . \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислим $\int_C \frac{e^{\pi z}}{2z^2-i} dz$, где

C - граница области $|z|<1$, $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$. Особые точки подынтегральной функции удовлетворяют уравнению $2z^2-i=0$. Решая это уравнение, находим полюса 1-го порядка: $z_{1,2} = \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right)$.

Полюс z_2 лежит вне области, ограниченной C , поэтому его не нужно учитывать при вычислении интеграла по формуле (10). Значит

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^{\pi z}}{2z^2-i} dz &= 2\pi i \cdot \operatorname{Выч} \left[\frac{e^{\pi z}}{2z^2-i}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right] = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{i}{2}} \frac{e^{\pi z}}{4z} = 2\pi i \frac{e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}}{2(1+i)} = \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}(i-1)}. \end{aligned}$$

1.4. Задание для самостоятельной работы.

Найти винчты относительно изолированных особых точек следующих функций

функция	ответ	функция	ответ
1. $\frac{1}{\sin z}$	$(-1)^k$	15. $\frac{\cos z}{z^2} - \frac{1}{\sin z^2}$	0, $\frac{(-1)^{k+1}}{2\sqrt{k}\pi}$
2. $\frac{e^z}{1+z^2}$	$\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}$	16. $\frac{z-\pi}{\cos^2 z} - \frac{\sin z}{z-\pi}$	0, $(-1)^{k+1}$
3. e^{1/z^2}	1, -1	17. $\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} + \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos 2z}$	-1, $\frac{(-1)^{k+1}}{8}(2k-3)\pi$
4. $\frac{\cos z}{z}$	1, -1	18. $\sin \frac{z}{z+1}$	$-\cos 1$
5. $\frac{\sin z}{\cos \frac{\pi}{2} z}$	$(-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{2 \sin(2k+1)}{\pi}$	19. $\frac{e^z}{\sin^2 z} - \frac{\sin z}{z^3}$	$1, e^{k\pi}$
6. $\frac{1}{\cos^2 z}$	0	20. $\frac{\cos \pi z}{(2z-1)^2}$	$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$
7. $\frac{z}{\sin^2 z}$	1	21. $\frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z}$	$\sin 1, \frac{1}{e}, -(\frac{1}{e} + \sin 1)$
8. $z^2 \cdot e^{\frac{1}{1-z}}$	$-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	22. $\frac{\operatorname{tg} z}{z^2} - \frac{e^z}{z}$	0, $\frac{-4}{(2k+1)^2 \pi^2}$
9. $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$	1, -1, 0	23. $\frac{1}{\sin^2 z}$	0, $\frac{i^{2n-k}}{2\sqrt{\pi n}}$
10. $\frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1}$	0, -1	24. $\operatorname{ctg}^3 z$	-1
11. $\frac{\cos z - 1}{z^2 \cdot \sin z}$	$-\frac{1}{2}, 0, -\frac{2}{\pi^2 (2n+1)^2}$	25. $\sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$	0
12. $\frac{1-e^{-z}}{z^2} - \frac{1}{\sin z}$	$-1, (-1)^{k+1}$	26. $\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$	2
13. $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2 (z+\frac{\pi}{2})}$	$-\frac{4}{9\pi^2}, -\frac{2}{3\pi}, \frac{4+6\pi}{9\pi^2}$	27. $\frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}$	$(-1)^k \cdot 2k^2 \pi^2$
14. $\frac{1 - \frac{\sin z}{z}}{z \cdot \sin z}$	$0, \frac{(-1)^k}{k\pi}$	28. $\frac{1}{z(1-e^{-sz})}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2\pi k i}$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2.1. Несобственные интегралы от функций комплексного переменного.

Рассмотрим понятие интеграла для случаев, когда или подинтегральная функция обращается в ∞ в отдельных точках контура интегрирования, или сам контур неограниченный. Интеграл в таких случаях называется несобственным.

Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая с концами в точках a и b , причем точка a конечная, а b может быть бесконечной и функция $f(z)$ непрерывна во всех точках $z \in \Gamma$, кроме, может быть, точки a . Обозначим $\Gamma_{z,R}$ — часть кривой Γ , лежащую вне круга $|z| < R$ (см. рис. 1).

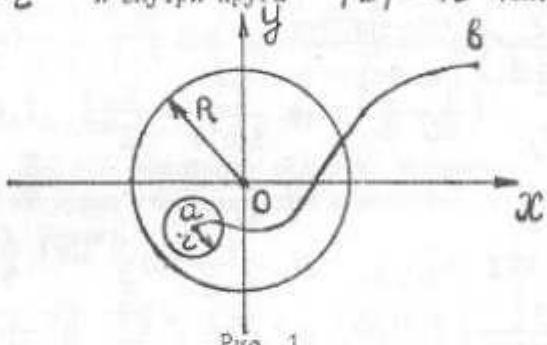


Рис. 1.

Если существует предел

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma_{z,R}} f(z) dz,$$

то он называется несобственным интегралом от функции $f(z)$ по контуру Γ и обозначается

$$\int_{\Gamma} f(z) dz. \quad (12)$$

В этом случае говорят, что $f(z)$ интегрируема по кривой Γ или, что несобственный интеграл (12) сходится.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(z)$ непрерывна во всех конечных точках кривой Γ , кроме внутренней точки $C \in \Gamma$, $C \neq a$, $C \neq b$. Обозначим Γ^1 и Γ^2 - кривые, на которые точка C делит Γ . Если существуют конечные пределы

$$\lim_{\substack{z_1 \rightarrow 0 \\ R_1 \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma^1} f(z) dz \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{z_2 \rightarrow 0 \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma^2} f(z) dz, \quad \text{то число}$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{z_1 \rightarrow 0 \\ R_1 \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma^1} f(z) dz + \lim_{\substack{z_2 \rightarrow 0 \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma^2} f(z) dz$$

называется несобственным интегралом от $f(z)$ по кривой

Γ . Если же существует

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma^0} f(z) dz \quad \text{где}$$

Γ^0 - части кривой Γ , лежащие вне окружности $|z-c| < 2$ и внутри $|z| < R$, то он называется

главным значением по Коши несобственного интеграла от $f(z)$

по кривой Γ и обозначается

$$v.p. \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится в смысле главного значения.

Пример. Найдем главное значение $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3}$, где Γ -

прямая $z = t(1+i)$, $-\infty < t < \infty$. По определению имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \frac{1}{(1+i)^2} \left[\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t^3} + \int_{\varepsilon}^A \frac{dt}{t^3} \right] = 0, \quad \text{так как}$$

$$\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t^3} = \left| \int_{dt=-du}^{t=-2L} \frac{du}{u^3} \right| = \int_A^{\varepsilon} \frac{du}{u^3} = - \int_{\varepsilon}^A \frac{dt}{t^3}.$$

$$2.2. \text{ Интегралы вида } J = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi.$$

Здесь $R(x, y)$ - рациональная функция переменных $x = e^{i\varphi}$ и y . Введем комплексную переменную $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \sin \varphi = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), d\varphi = -i \frac{dz}{z}$$

и исходный интеграл переходит в следующий: $J = \int_{|z|=1} f(z) dz$,

где $f(z) = -\frac{i}{z} R\left[\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right]$ - рациональная функция комплексной переменной z . Если функция $f(z)$ не имеет полюсов на окружности $|z| = 1$, то по основной теореме о вычетах

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}[f(z), z_k],$$

где z_k ; $k = 1, 2, \dots, n$ - полюсы функции $f(z)$, лежащие в круге $|z| < 1$.

Пример 3. Вычислим интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 4 \cos \varphi)^2}$. Сделав

$$\begin{aligned} \text{замену } z = e^{i\varphi}, \text{ получим} \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 4 \cos \varphi)^2} = \left| \cos \varphi = \frac{z^2 + 1}{2z} \right| = \frac{1}{4} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 [5 + 2(z^2 + 1)]} = \\ = \frac{1}{4} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(2z^2 + 5z + 2)^2} = \frac{1}{4} 2\pi i \text{Выч}\left[\frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2}, -\frac{1}{2}\right] = \\ = 2\pi \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\frac{z(z + \frac{1}{2})^2}{(2z^2 + 5z + 2)^2} \right]' = \frac{2\pi}{4} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\frac{z}{(z + 2)^2} \right] = \\ = \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-z + 2}{(z + 2)^2} = \frac{10\pi}{27}. \end{aligned}$$

2.3. Интегралы с бесконечными пределами

Вначале рассмотрим интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

считая, что функция $f(z)$ имеет на действительной оси полюс d_1 кратности 1. В этом случае под значением интеграла будем понимать главное значение по Коши:

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{|x-d_1| > \epsilon} f(x) dx.$$

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$, $z = x + iy$ аналитическая в полу плоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ всюду, кроме конечного числа особых точек $d_1, d_2, \dots, d_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, причём d_1, d_2, \dots, d_m лежат на действительной оси и являются полюсами первого порядка. Если $f(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке нуль не ниже 1-го порядка (существует и конечен $\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z)$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \left\{ \sum_{k=1}^m \operatorname{Выч}[f(z), d_k] + \operatorname{Выч}[f(z), \infty] \right\} + 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч}[f(z), \beta_k]$$

и понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Предположим для простоты, что $f(z)$ имеет на действительной оси лишь один полюс первого порядка $Z = d_1$. Построим замкнутый контур

$C = C_R \cup [-R, d_1 - \gamma] \cup C_2 \cup [d_1 + \gamma, R]$ (рис. 2), где C_R — полуокружность $|Z| = R$, $\operatorname{Im} Z \geq 0$ настолько большого радиуса R , что $\max_{l, j} \{|d_l|, |\beta_j|\} < R$; C_2 — полуокружность $|Z - d_1| = \gamma$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ настолько малого радиуса γ , что $f(z)$ аналитическая в области $0 < |Z - d_1| \leq \gamma$; $[-R, d_1 - \gamma]$ и $[d_1 + \gamma, R]$ — отрезки оси $\operatorname{Im} Z = 0$.

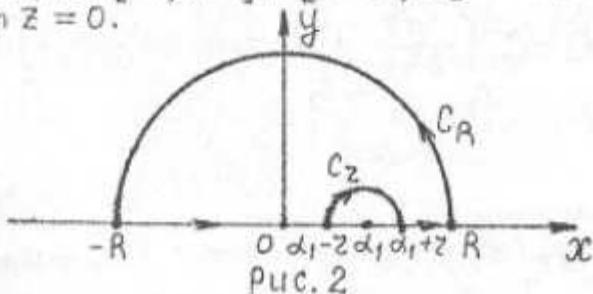


Рис. 2

По основной теореме о вычетах имеем

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \left(\int_{C_R - R}^{d_1 - z} + \int_{C_2}^{d_1 + z} + \int_{C_R}^R \right) f(z) dz = \\ &= 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \text{Выч}[f(z), \beta_k]. \end{aligned} \quad (14)$$

Делим каждый из интегралов.

Функцию $f(z)$ по условию леммы можно при достаточно большом R , $z \in C_R$, представить в виде

$$f(z) = \frac{d_{-1}}{z} + \psi(z), \quad \text{причем } |\psi(z)| < \frac{M}{R^2}. \quad \text{Тогда } \int_C f(z) dz = \int_{C_R} \frac{d_{-1}}{z} dz + \int_{C_R} \psi(z) dz = d_{-1} \pi i + \int_{C_R} \psi(z) dz,$$

где

$$d_{-1} = -\text{Выч}[f(z), \infty], \quad \left| \int_{C_R} \psi(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \pi R = \frac{M \pi}{R}.$$

Отсюда имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = -\pi i \cdot \text{Выч}[f(z), \infty]. \quad (15)$$

Определим $\int_{C_2} f(z) dz$. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z - d_1| \leq Z$ имеет вид $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - d_1} + \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая и, следовательно, ограниченная на C_2 функция, т.е. $|\varphi(z)| \leq M$ при $z \in C_2$.

С учетом этого имеем

$$\int_{C_2} f(z) dz = c_{-1} \int_{C_2} \frac{dz}{z - d_1} + \int_{C_2} \varphi(z) dz = -i\pi c_{-1} + \int_{C_2} \varphi(z) dz,$$

причем

$$\left| \int_{C_2} \varphi(z) dz \right| \leq \int_{C_2} |\varphi(z)| |dz| \leq M \cdot Z \int_0^\pi d\varphi = \pi M Z.$$

Значит

Значит

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_C f(z) dz = -i\pi C_-, = -i\pi \operatorname{ВыЧ} [f(z), d_1]. \quad (16)$$

Переходя теперь к пределу в формуле (14) и учитывая (15) и (16), получим равенство леммы 1:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 2\pi i \sum_{K=1}^n \operatorname{ВыЧ} [f(z), \beta_K] + \pi i \left\{ \operatorname{ВыЧ} [f(z), d_1] + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ВыЧ} [f(z), \infty] \right\}. \end{aligned}$$

В частности, если $f(z)$ не имеет особых точек на оси $\operatorname{Im} z = 0$, то при выполнении условий леммы 1, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{K=1}^n \operatorname{ВыЧ} [f(z), \beta_K], \quad \operatorname{Im} \beta_K > 0. \quad (17)$$

Следствие 1. В том случае, когда подинтегральная функция

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ является дробно-рациональной, причем вещественные нули a_i полинома $Q(z)$ имеют порядок 1, а степень $Q \geq$ степени $P+1$, имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz &= 2\pi i \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{ВыЧ} [f(z), a_i] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{ВыЧ} [f(z), a_i] + \frac{1}{2} \operatorname{ВыЧ} [f(z), \infty] \right) = \\ &= -2\pi i \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{ВыЧ} [f(z), a_i] + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{ВыЧ} [f(z), a_i] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{ВыЧ} [f(z), \infty] \right) = \pi i \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{ВыЧ} [f(z), a_i] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{ВыЧ} [f(z), a_i] \right), \end{aligned}$$

ибо в этом случае в качестве дуги C_R можно взять не только верхнюю, но и нижнюю $\operatorname{Im} z < 0$ полуокружность.

Пример 10. Вычислим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x+4}{x(x^2+1)^2} dx$. Функция

- 18 -

$f(z) = \frac{3z+4}{z(z^2+1)^2}$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ две особые точки: полюс 1-го порядка $z=0$ и полюс 2-го порядка $z=i$. Найдем вычеты

$$\text{Выч}[f(z), 0] = \frac{3z+4}{(z^2+1)^2} \Big|_{z=0} = 4;$$

$$\text{Выч}[f(z), i] = \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 f(z) \right] \Big|_{z=i} = -\left(2 + \frac{3}{4}i\right);$$

$$\text{Выч}[f(z), \infty] = 0.$$

В данном случае выполняются все условия леммы 1, поэтому на основании формулы (13) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x+4}{x(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \text{Выч}[f(z), i] + \pi i \text{Выч}[f(z), 0] = \frac{3\pi i}{2}.$$

Лемма 2. (Хордана). Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области $D_0: |z| \geq R_0$, $\operatorname{Im} z \geq -\alpha$ и $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R} |f(z)| = 0$, где C_R — дуга окружности $|z|=R$, $\operatorname{Im} z \geq -\alpha$.

Тогда при любом заданном числе $\lambda > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} \cdot f(z) dz = 0. \quad (18)$$

Доказательство. Примем для определенности $\alpha > 0$.

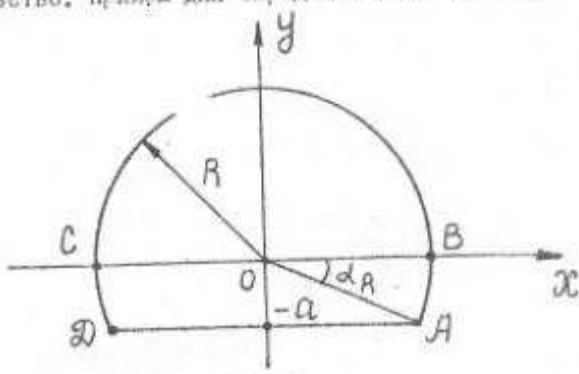


Рис. 3

Разделим дугу $\overset{\text{---}}{CA}$ на три участка $\overset{\text{---}}{AB}$, $\overset{\text{---}}{BC}$ и $\overset{\text{---}}{CD}$ (рис. 3) и оценим интеграл на каждом участке. Сначала оценим $J_{AB} = \int_{AB} e^{i\lambda z} f(z) dz$. Имеем

$$|J_{AB}| \leq \int_{AB} |e^{i\lambda z}| \cdot |f(z)| ds.$$

Пусть $M_R = \max_{z \in CR} |f(z)|$. По условию $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$. Учитывая, что при $z \in CR$ $y \geq -a$, получаем $|e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda(x+iy)}| = e^{-\lambda y} \leq e^{\lambda a}$. Следовательно

$$|J_{AB}| \leq M_R e^{\lambda a} \int_{AB} ds = M_R e^{\lambda a} \cdot R \cdot d_R,$$

где d_R — величина угла $\angle AOB$; $R \cdot d_R$ — длина дуги $\overset{\text{---}}{AB}$. Учитывая, что $d_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot d_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \cdot d_R \cdot \sin d_R}{\sin d_R} = \lim_{d_R \rightarrow 0} \frac{d_R}{\sin d_R} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \sin d_R = \\ = a,$$

Таким образом

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |J_{AB}| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} M_R \cdot e^{\lambda a} \cdot R \cdot d_R = 0.$$

Аналогично доказывается, что $\lim_{R \rightarrow \infty} J_{CD} = 0$.

Оценим теперь интеграл

$$J_{BC} = \int_{BC} e^{i\lambda z} \cdot f(z) dz.$$

При $z \in CR$, $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, поэтому

$$|e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda R(\cos \varphi + i \sin \varphi)}| = e^{-\lambda R \sin \varphi}$$

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая эти соотношения, получим

- 20 -

$$|\mathcal{J}_{BC}| \leq R \cdot M_R \cdot \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin \varphi} d\varphi = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \sin \varphi} d\varphi \leq$$

$$\leq 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi M_R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda R}).$$

Отсюда следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{BC} = 0$.

В итоге имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz} \cdot f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{J}_{AB} + \mathcal{J}_{BC} + \mathcal{J}_{CD}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение леммы 2 остается в силе и при $a \leq 0$. В этом случае отпадает необходимость оценки интегралов \mathcal{J}_{AB} и \mathcal{J}_{CD} .

Пример 11. Пользуясь леммой Лордана, вычислим интеграл $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$. Введем функцию $g(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ и замкнутый контур $C = C_R \cup [-R, R]$, где C_R — полуокружность $|z|=R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $R > 1$ (Рис. 4)

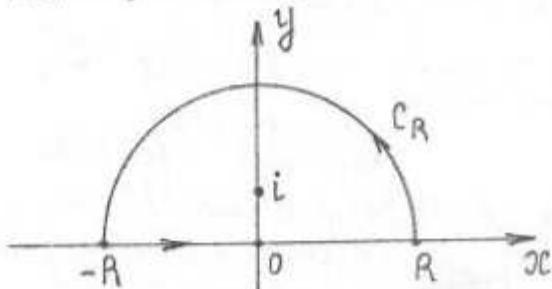


Рис. 4.

Так как функция $\frac{g(z)}{z-i}$ имеет внутри контура C полосе второго порядка

$$\text{Выч } [g(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z-i)^2 g(z)] = \\ = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{2iz}}{(z+i)^2} \right] \Big|_{z=i} = \frac{i}{4e^2},$$

$$\begin{aligned} \int_C g(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{i2x}}{(x^2+1)^2} dx + \int_{CR} \frac{e^{izz}}{(z^2+1)^2} dz = \\ &= 2\pi i \frac{i}{4e^2} = -\frac{\pi}{2e^2}. \end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая, что по лемме Дордона

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{CR} \frac{e^{izz}}{(z^2+1)^2} dz = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{(x^2+1)^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= -\frac{\pi}{2e^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание четность $\cos 2x$ и нечетность $\sin 2x$, находим

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{4e^2}.$$

Лемма 3. Пусть функция $f(z)$, $z = x + iy$ аналитична в полуплоскости $\Im z \geq 0$ всюду, кроме конечного числа особых точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, причем $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ лежат на действительной оси и являются полюсами первого порядка. Если $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in CR} |f(z)| = 0$, где C_R — полукружность $|z| = R$, $\Im z > 0$, то для любого заданного числа $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = \pi i \sum_{K=1}^m \text{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \alpha_K] + \\ + 2\pi i \sum_{K=1}^n \text{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \beta_K] \quad (19)$$

и понимается в смысле главного значения
доказательство.

Обратимся к доказательству леммы 1. Тогда для замкнутого контура C , изображенного на рис. 2, получим

$$\int_C e^{i\lambda z} f(z) dz = \left(\int_{C_R} + \int_{-R}^{0} + \int_{C_2} + \int_{d_1+2}^R \right) e^{i\lambda z} f(z) dz = \\ = 2\pi i \sum_{K=1}^n \text{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \beta_K].$$

Оговаривая, как и при доказательстве леммы 1, используя лемму 2, в пределе при $Z \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0 \quad \text{и следовательно} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} f(z) dz = 2\pi i \sum_{K=1}^n \text{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \beta_K] + \\ + \pi i \text{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \alpha_1].$$

Не составляет труда распространить доказательство на случай более чем одной вещественной особой точки.

В частности, если $f(z)$ не имеет особых точек на действительной оси $\Im z = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \beta_i], \quad (20) \\ \Im \beta_i > 0.$$

Следствие 2. Если $f(x)$ - действительная функция, то в формуле (19) действительные и миниме части, по-

получим следующие формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx = -2\pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{i}{2} \sum_{K=1}^m \operatorname{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \alpha_K] + \sum_{K=1}^n \operatorname{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \beta_K] \right\} \quad (21)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx = 2\pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{K=1}^m \operatorname{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \alpha_K] + \sum_{K=1}^n \operatorname{Выч} [e^{i\lambda z} f(z), \beta_K] \right\}. \quad (22)$$

Пример 12. Вычислим $\mathcal{J} = \int_0^\infty \frac{x \sin \pi x}{x^4 - 1} dx$.

Вследствие четности подинтегральной функции имеем по формуле (22)

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^4 - 1} dx = \pi \cdot \operatorname{Re} \left(\operatorname{Выч} \left[\frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^4 - 1}, \beta_1 \right] + \frac{1}{2} \cdot \sum_{K=1}^2 \operatorname{Выч} \left[\frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^4 - 1}, \alpha_K \right] \right),$$

так как функция $f(z) = \frac{z}{z^4 - 1}$ имеет при $\operatorname{Im} z > 0$ полюсы первого порядка в точках $\alpha_1 = -i$, $\alpha_2 = i$, $\beta_1 = i$.

Линьчицы имеют следующие значения:

$$\operatorname{Выч} [f(z) e^{i\pi z}, -1] = \frac{e^{-i\pi}}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$\operatorname{Выч} [f(z) e^{i\pi z}, 1] = \frac{e^{i\pi}}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$\operatorname{Выч} [f(z) e^{i\pi z}, i] = -\frac{e^{-\pi}}{4}, \text{ поэтому}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \cdot \sin \pi x}{x^4 - 1} dx = -\frac{\pi}{4}(1 + e^{-\pi}).$$

2.4. Интегралы вида $J = \int_0^\infty x^{\rho-1} f(x) dx$ ($0 < \rho < 1$).

Лемма 4. Пусть дробно-рациональная функция $f(z)$ имеет на полусоси $0 < \operatorname{Re} z < \infty$ полюсы первого порядка $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ и полюсы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, не лежащие на действительном полуоси $0 < \operatorname{Re} z < \infty$. Если

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z^\rho f(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z^\rho f(z)| = 0 \quad \text{при } 0 < \rho < 1,$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\rho-1} f(x) dx &= -\pi i e^{i\pi\rho} \sum_{l=1}^m \alpha_l^{\rho-1} B_{bl} \operatorname{Im} [f(z), \alpha_l] + \\ &+ \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\rho i}} \sum_{k=1}^n B_{bk} \operatorname{Im} [z^{\rho-1} f(z), \beta_k]. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Предположим для простоты, что на действительной полуоси $0 < \operatorname{Re} z < \infty$ имеется только один полюс первого порядка $z = \alpha$. В комплексной плоскости с разрезом по лучу $0 \leq \operatorname{Re} z < \infty$ виделим однозначную ветвь функции $z^{\rho-1}$, положительную на верхнем бою разреза и обозначим её $g(z) = z^{\rho-1}$. Рассмотрим замкнутый контур C рис. 5

$$C = [R, \alpha+z] \cup C'_z \cup [\alpha-z, z] \cup C_z \cup [z, \alpha-z] \cup C''_z \cup [\alpha+z, R] \cup C_R,$$

состоящий из окружностей $C_R : |z| = R$ и $C_z : |z| = z'$; полуокружностей $C'_z : |z| = z$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ и $C''_z : |z| = z$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и отрезков действительной оси.

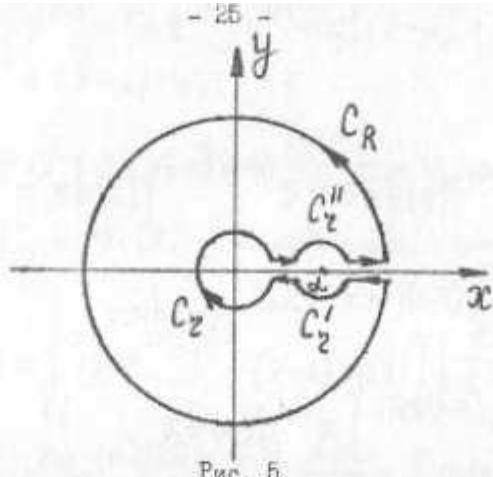


Рис. 5

Будем считать, что внутри контура C содержатся все полюсы функции $f(z)$, кроме α . Тогда

$$\begin{aligned} \int_C z^{p-1} f(z) dz &= \left(\int_{C_R} + \int_{R} + \int_{C_2'} + \int_{d-r} + \int_{C_2''} + \int_{r} \right) z^{p-1} f(z) dz = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч} [z^{p-1} f(z), \beta_k]. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как по условию леммы для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом или достаточно малом по модулю z

$$\begin{aligned} |z^{p-1} f(z)| &< \frac{\varepsilon}{2\pi}, \text{ то } 2\pi \\ \left| \int_{C_R} z^{p-1} f(z) dz \right| &\leq \int_{C_R} |z^{p-1} f(z)| ds = \int_0^\pi |z^{p-1} f(z)| d\varphi < \varepsilon, \text{ т.е.} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} z^{p-1} f(z) dz &= 0. \end{aligned}$$

Analogично получаем

$$\lim_{r' \rightarrow 0} \int_{C_2} z^{p-1} f(z) dz = 0.$$

Учитывая, что точки верхнего берега разреза вдоль действительной оси имеют аргумент $\varphi = 0$, а точки нижнего берега имеют $\varphi = 2\pi$, т.е. $z = x e^{2\pi i}$,

наайдем

$$\begin{aligned} \int\limits_{R+i\varepsilon}^{R+\varepsilon} z^{p-1} f(z) dz &= \int\limits_R^R e^{(p-1)\ln z} f(z) dz = \\ &= \int\limits_R^{R+\varepsilon} e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)} f(x) dx = \\ &= e^{(p-1)2\pi i} \int\limits_R^{R+\varepsilon} x^{p-1} f(x) dx, \end{aligned}$$

или

$$\int\limits_{R-i\varepsilon}^{R-\varepsilon} z^{p-1} f(z) dz = -e^{2p\pi i} \int\limits_{R-\varepsilon}^R x^{p-1} f(x) dx.$$

Аналогично получаем.

$$\int\limits_{z'-i\varepsilon}^{z'} z^{p-1} f(z) dz = -e^{2p\pi i} \int\limits_{z'}^{z'-\varepsilon} x^{p-1} f(x) dx.$$

Далее имеем

$$\int\limits_{R+i\varepsilon}^R z^{p-1} f(z) dz = \int\limits_{R+i\varepsilon}^R e^{(p-1)\ln z} f(z) dz = \int\limits_{R+i\varepsilon}^R e^{(p-1)(\ln x + i\alpha)} f(x) dx,$$

или

$$\int\limits_{R+i\varepsilon}^R z^{p-1} f(z) dz = \int\limits_{R+i\varepsilon}^R x^{p-1} f(x) dx.$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_{z'-i\varepsilon}^{z'} z^{p-1} f(z) dz = \int\limits_{z'-i\varepsilon}^{z'} x^{p-1} f(x) dx.$$

Рассмотрим теперь интегралы по C_2' и C_2'' . В окрестности точки $z = \omega \cdot e^{2\pi i \varepsilon}$ на нижнем срезе могут не с-

то разложение $Z^{p-1} = (\alpha e^{2\pi i})^{p-1} + \alpha'_1(z-\alpha) + \dots =$
 $= (\alpha e^{2\pi i})^{p-1} + (z-\alpha) \cdot \psi_1(z);$
 $f(z) = \frac{C'_1}{z-\alpha} + C'_0 + C'_1(z-\alpha) + \dots = \frac{C'_1}{z-\alpha} + \varphi_1(z)$, где

функции $\psi_1(z)$ и $\varphi_1(z)$ аналитические в данной окрестности. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{C'_2} z^{p-1} f(z) dz &= \int_{C'_2} \left[(\alpha e^{2\pi i})^{p-1} + (z-\alpha) \psi_1(z) \right] \cdot \left[\frac{C'_1}{z-\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(z) \right] dz = \alpha \cdot e^{(p-1)2\pi i} C'_1 \int_{C'_2} \frac{dz}{z-\alpha} + \int_{C'_2} \varphi_1(z) dz, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= C'_1 \psi_1(z) + \left[(\alpha e^{2\pi i})^{p-1} + (z-\alpha) \psi_1(z) \right] \psi_1(z) = \\ &= C'_1 \psi_1(z) + z^{p-1} \varphi_1(z). \end{aligned}$$

Функция $\varphi_1(z)$ является аналитической в рассматриваемой окрестности, а значит и ограниченной $|\varphi_1(z)| \leq M_1$, поэтому

$$\left| \int_{C'_2} \varphi_1(z) dz \right| \leq M_1 \cdot \int_{C'_2} ds = \pi r M_1.$$

Следовательно

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{C'_2} \varphi_1(z) dz = 0.$$

Учитывая, что на C'_2 $z-\alpha = r e^{i\varphi}$, $2\pi \geq \varphi \geq \pi$, имеем

$$\int_{C'_2} \frac{dz}{z-\alpha} = i \int_{2\pi}^{\pi} d\varphi = -i\pi.$$

переходя к пределу в выражении (25), получим

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{C_z'} z^{p-1} f(z) dz = -i\pi \alpha^{p-1} e^{2\pi\rho i} \operatorname{Выч}[f(z), \alpha]. \quad (30)$$

Аналогично получаем

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{C_z''} z^{p-1} f(z) dz = -i\pi \alpha^{p-1} e^{2\pi\rho i} \operatorname{Выч}[f(z), \alpha].$$

С учетом найденных предельных значений интегралов из выражения (22) в пределе получаем следующее равенство.

$$(1 - e^{2\pi\rho i}) \int_0^\infty x^{p-1} f(x) dx - i\pi \alpha^{p-1} (1 + e^{2\pi\rho i}) \operatorname{Выч}[f(z), \alpha] = \\ = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч}[z^{p-1} f(z), \beta_k].$$

Отсюда получаем окончательное выражение

$$\int_0^\infty x^{p-1} f(x) dx = -i\pi \alpha^{p-1} \operatorname{ctg} p\pi \operatorname{Выч}[f(z), \alpha] + \\ + \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\rho i}} \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч}[z^{p-1} f(z), \beta_k].$$

Пример 15. Вычислим интеграл $\mathcal{J} = \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{x^4 - 1}$. Представим

интеграл в виде $\mathcal{J} = \int_0^\infty x^{1/2-1} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$. Функция

$f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 1}$ имеет на действительной полусоси $0 < \operatorname{Re} z < \infty$ лишь один полюс первого порядка $z = 1$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z^{1/2} f(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z^{1/2} f(z)| = 0.$$

Значит для вычисления интеграла можно воспользоваться формулой (21) леммы 4 при $\rho = \frac{i}{2}$.

Функция $f(z)$ имеет полюсы первого порядка в точках $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = i$, $\beta_2 = -i$, причем

$$Bvly [f(z), 1] = \frac{1}{4} ; \quad Bvly [z^{-\frac{1}{2}} f(z), -1] = \frac{i}{4} ;$$

$$Bvly [z^{-\frac{1}{2}} f(z), i] = -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{4}} ;$$

$$Bvly [z^{-\frac{1}{2}} f(z), -i] = -\frac{1}{4} e^{\frac{-3\pi i}{4}} .$$

По формуле (21) получаем

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^4 - 1} = \frac{\pi}{4} (\sqrt{2} - 1) ,$$

так как

$$\operatorname{ctg} \rho \pi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 , \quad \frac{2\pi i}{1 - e^{2\rho\pi i}} = \pi i ,$$

$$Bvly [z^{-\frac{1}{2}} f(z), -1] + Bvly [z^{-\frac{1}{2}} f(z), i] + \\ + Bvly [z^{-\frac{1}{2}} f(z), -i] = \frac{i}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{i}{4} (1 - \sqrt{2}) .$$

Замечание 5. Формулу (21) можно использовать для вычисления интегралов вида

$$\int_0^\infty x^{\rho-1} \ln^m x f(x) dx , \quad 0 < \rho < 1 , \quad m \geq 0 \text{ — целое.}$$

Для этого нужно проанализировать интеграл

$$J(\rho) = \int_0^\infty x^{\rho-1} f(x) dx \quad m \text{ раз по параметру } \rho .$$

Пример 14. Вычислим интеграл $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2} dx$. Применив формулу (21),

напишем

$$J(\rho) = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\rho i}} \text{Выч} \left[\frac{z^{\rho-1}}{(1+z)^z} z^{-1} \right] = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\rho i}} (\rho-1)(-1)^{\rho}$$

Дифференцируя по параметру ρ , получим

$$J'(\rho) = 2\pi i \left\{ \frac{(-1)^{\rho} + (\rho-1)(-1)^{\rho} \ln(-1)}{(1-e^{2\pi\rho i})^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi i e^{2\pi\rho i} (\rho-1)(-1)^{\rho}}{(1-e^{2\pi\rho i})^2} \right\}. \quad (24)$$

Исходный интеграл равен $J'\left(\frac{1}{2}\right)$, так как

$$J'\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{(x+1)^z} \ln x dx \Big|_{\rho=\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2} dx.$$

Подставляя $\rho = \frac{1}{2}$ в формулу (24), находим

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2} dx = 2\pi i \frac{(i-\frac{1}{2}i\pi i)2 + 2\pi i \cdot \frac{1}{2}i}{4} = -\pi.$$

2.5 Задание для самостоятельной работы

Вычислить интегралы с помощью вычетов (обход контура
всюду против часовой стрелки)

Интеграл	: Ответ :	Интеграл	: Ответ
1) $\int_{ z =2} \frac{dz}{z(z-1)^2(z-2)}$	0	11) $\int_{ z-2 =2} \frac{\sin^2 z}{(z-\frac{\pi}{2})^3} dz$	$-2\pi i$
2) $\int_{ z =1} \frac{dz}{z^2(z-2i)^2}$	$-\frac{\pi}{2}$	12) $\int_{ z =2} \frac{e^z - 1}{z^3} dz$	πi
3) $\int_{ z-i =2} \frac{dz}{z^2(z-2i)^2(z-i)}$	0	13) $\int_{ z-1 =2} e^{\frac{1}{z}} dz$	$2\pi i$
4) $\int_{ z-\frac{1}{2} =1} \frac{e^z}{z^2-1} dz$	$\pi i e i$	14) $\int_{ z-2\pi i =1} \frac{z^2}{e^z-1} dz$	$-8\pi^3 i$
5) $\int_{ z =4, n>0 - \text{целое}} \frac{e^z}{(z-4\pi i)^n} dz$	$-\frac{2\pi i}{(n-1)!}$	15) $\int_{ z =8} \frac{dz}{\sin z}$	$2\pi i$
6) $\int_{ z =1, n>0 - \text{целое}} \frac{\cos z}{z^n} dz$	$\begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & n=2k+1 \end{cases}$	16) $\int_{ z =1} \operatorname{tg} \pi z dz$	$-4i$
7) $\int_{ z =3} \frac{z dz}{(2-z)^2(z^2+16)}$	$\frac{3\pi i}{50}$	17) $\int_{ z =1} e^z \cdot \cos \frac{1}{z} dz$	$2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}$
8) $\int_{ z-3 =2} \frac{z dz}{(z-4)^2(z+1)}$	$\frac{2\pi i}{25}$	18) $\int_{ z-4\pi i =4} \frac{e^z}{e^z+1} dz$	$4\pi i$
9) $\int_{ z =3} \frac{z dz}{(z+2)^2(z-1)^2}$	0	19) $\int_{ z-1 =1} e^{\frac{1}{z-1}} \cos \frac{1}{z-1} dz$	$2\pi i$
10) $\int_{ z-1 =\frac{3}{2}} \frac{z^4 e^{\pi z}}{z^2+1} dz$	0	20) $\int_{ z-2i =2} \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z-2i} dz$	$2\pi i$

Интеграл	: Ответ	Интеграл	: Ответ
21) $\int_{ z =2} \frac{z \cdot e^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz$	0	32) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x + \cos x}$	$\pi\sqrt{2}$
22) $\int_{ z+1 =2} \frac{1}{z+2} \sin \frac{1}{z+1} dz$	$2\pi i \sin 1$	33) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$	π
23) $\int_{ z =2} \frac{\cos \frac{1}{z}}{1-z} dz$	$-2\pi i$	34) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$	$\frac{\pi}{8}$
24) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \frac{3}{5} \cos x}$	$\frac{5}{2}\pi$	35) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$	$\frac{\pi}{6}$
25) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{1}{2} + \sin x}$	$\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$	36) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
26) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + \frac{3}{5} \cos x)^2}$	$\frac{125}{32}\pi$	37) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+2x+10)^3}$	$-\frac{\pi}{642}$
27) $\int_{-2a}^{2\pi} \frac{\sin x dx}{-2a \cos x + a^2}$	0	38) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$	$\frac{\pi}{4}$
28) $\int_{1-2a \cos x + a^2}^{2\pi} \frac{(1-a \cos x) dx}{1-2a \cos x + a^2}$	$\begin{cases} 2\pi, & a < 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$	39) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$	$\frac{\pi}{8a^3}$
29) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + \sin^2 x}$	$\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}, a \neq \pm 1$	40) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$	$\frac{5\pi}{36}$
30) $\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} dx$	$\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$	41) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dx$	πe^{-2}
31) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x + \cos x}{3 + 2 \cos x} dx$	$2 \cdot \frac{3\sqrt{5}-7}{3\sqrt{5}-5}$	42) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^4 + x^2 + 1} dx$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}m}{2}} \cdot \sin\left(\frac{m}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

Интеграл	: Ответ	Интеграл	: Ответ
43) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2} dx$, $\lim_{m \rightarrow 0} e^{-ma}$	$\frac{\pi}{4} e^{-ma}$	55) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1}$	$-\frac{\pi}{4}$
44) $\int_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^4 + 1} dx$	$\frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}$	56) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+x-2)}$	0
45) $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$	$\frac{\pi}{12} e^4 (2e^2 - 1)$	57) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$	$\frac{\pi}{2} (1 - e^{-1})$
46) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin mx}{x^4 + a^4} dx$, $\frac{\pi}{2} e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}$	$\frac{\pi}{2} e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}$	58) $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^4 - 1} dx$	$-\frac{e^{-m}}{4}$
47) $\int_0^{\infty} \frac{(1+x^2) \cos ax dx}{x^4 + x^2 + 1}$, $a > 0$	$\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{3}a}{2}}$	59) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 - 1} dx$	$\pi \cos m$
48) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$\frac{\pi}{24} e^3 (3e^2 - 1)$	60) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x(x-1)(x+2)} dx$	$\frac{\pi}{3} \sin 2x \times (1 - \cos 2)$
49) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$	$\pi e^{-2} \cos 2$	61) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)^2} dx$	$\frac{\pi}{8} (4 - \frac{3}{e})$
50) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$	$\frac{\pi e^{-3}}{3} (\cos 1 - 3 \sin 1)$	62) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$	$\frac{\pi}{2a} \ln a$
51) $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx$, $a > 0$	$\frac{\pi a}{2}$	63) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2x + 2} dx$	$\frac{\pi}{4} \ln 2$
52) $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx$, $a > 0, b > 0$	$\pi(b-a)$	64) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx$	$-\frac{\pi}{4}$
53) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$	$-\frac{\pi i}{2}$	65) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x^2+1)} dx$	$-\frac{\pi i}{16}$
54) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)(x^2+4)}$	$\frac{2\pi}{5}$	66) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx$	$\frac{\pi}{2a} (\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4})$

Литература

1. Лоран Шварц. Анализ. т.2. Мир. И., 1972
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Изд. 3. Наука, И., И, 1974
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4. И., Наука, 1973
4. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. И., Наука, 1978.
5. Волковыский Л.И., Лунд Г.Л, Араманович И.Р. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. И., Физматгиз, 1960.
6. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. И., Наука, 1969
7. Ангипецко И.И., Коалова Р.В. Задачи по теории функций комплексной переменной. "Высшая школа", Минск, 1976
8. Грищенко А.Е., Нагнибина И.И., Настасиев П.И. Теория функций комплексного переменного. Решение задач. "Высшая школа", 1986