Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
“Физические основы информационно-телекоммуникационных систем”

Кошелев В.Н.

ПРАКТИКУМ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

(Электронное методическое пособие)

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Учебная дисциплина: “Дифференциальные уравнения”

Специальность “090106 Информационная безопасность телекоммуникационных систем”. Направления: “010800.62 Радиофизика, 010300.62 Фундаментальная информатика и информационные технологии”

Нижний Новгород
2010

Предисловие

Настоящее пособие посвящено методам интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Помимо традиционных методов решений подробно изучается операторный метод для линейных уравнений и систем, который в отличие от стандартных приемов во многих случаях значительно облегчает нахождение частных решений. Приемы, посвященные решению уравнений с помощью степенных рядов, будут полезны там, где не работают другие методы. Пособие содержит 14 занятий. В начале каждого занятия приводится краткая сводка теории, которая подкрепляется подробными решениями достаточного количества примеров.

Занятие 1. Уравнения с разделяющимися переменными
Однородные уравнения

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1. *Будем говорить, что у функции $f(x, y)$ разделяются переменные, если ее можно представить в виде произведения функций одного переменного*

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

Определение 2. *Уравнение вида*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

где у функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ разделяются переменные, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Из этих определений следует, что уравнение с разделяющимися всегда можно привести к виду

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0.$$

Для решения этого уравнения поделим обе его части на произведение $N_1(x)M_2(y)$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0.$$

Заметим, что деление уравнения на $N_1(x)M_2(y)$ может привести к потере решений, при которых $N_1(x)M_2(y) = 0$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем общее решение уравнения с разделяющимися переменными

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = C.$$

К этому решению нужно добавить частные решения, которые получаются при решении уравнения $N_1(x)M_2(y) = 0$.

П р и м е р ы

1) Решить уравнение

$$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Сначала приводим уравнение к виду с разделяющимися переменными

$$x(y^2 + 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

Делим обе части уравнения на произведение $(y^2+1)(x^2-1)$

$$\frac{x}{x^2-1}\,dx+\frac{y}{1+y^2}\,dy=0.$$

Умножаем обе части этого уравнения на 2 и интегрируем

$$\frac{2x}{x^2-1}\,dx+\frac{2y}{1+y^2}\,dy=0,\qquad \int\frac{2x}{x^2-1}\,dx+\int\frac{2y}{1+y^2}\,dy=0,$$
$$\int\frac{d(x^2)}{x^2-1}+\int\frac{d(y^2)}{1+y^2}=0,\qquad \ln|x^2-1|+\ln(1+y^2)=\ln|C|,\quad C\neq 0.$$

Произвольную постоянную при интегрировании, которая может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$, в данном случае удобно записать в виде $\ln|C|$ ($C\neq 0$), так как $\ln|C|$ также принимает все значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Потенцируя последнее выражение, получаем

$$(x^2-1)(1+y^2)=C,\quad C\neq 0.$$

При делении на $(y^2+1)(x^2-1)$ мы можем потерять решения $x=1$ и $x=-1$, при которых $(y^2+1)(x^2-1)=0$. Простой проверкой убеждаемся, что $x=\pm 1$ удовлетворяют исходному уравнению. Видно, что эти решения входят в полученное при интегрировании, если $C=0$. Таким образом, окончательный ответ можно записать так

$$(x^2-1)(1+y^2)=C,$$

где C — произвольная постоянная.

2) Решить задачу Коши

$$x^2y'+y=1,\quad y(1)=3.$$

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде

$$x^2y'=1-y.$$

Умножим обе части уравнения на dx. При этом учитываем, что $y'dx=dy$

$$x^2dy=(1-y)dx.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dy}{y-1}=-\frac{dx}{x^2},\qquad \int\frac{dy}{y-1}=-\int\frac{dx}{x^2},$$

$$\ln|y-1|=\frac{1}{x}+\ln|C|,\qquad y-1=C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\quad C\neq 0.$$

Потерянное частное решение $y=1$ входит в общее решение при $C=0$. Итак

$$y=1+C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

где C — произвольная постоянная.

Используя начальное условие $y(1) = 3$, находим

$$3 = 1 + C\,\mathrm{e}, \qquad C = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Окончательно получаем

$$y = 1 + 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x} - 1}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

где a и b — некоторые постоянные. Заменой $z = ax + by$ это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными и, следовательно, интегрируется. Действительно, переходя к новым переменным x и $z(x)$, будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z), \quad dx = \frac{dz}{a + bf(z)}.$$

Интегрируя, получим

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C.$$

П р и м е р. Решить уравнение

$$y' = \cos(y + x).$$

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \cos(y + x)$$

и сделаем замену $z = y + x$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} + 1, \quad \frac{dz}{dx} = \cos z + 1, \quad dx = \frac{dz}{1 + \cos z}, \quad dx = \frac{dz}{2\cos^2\dfrac{z}{2}},$$

$$\int dx = \int \frac{dz}{2\cos^2\dfrac{z}{2}}, \quad x = \operatorname{tg}\frac{z}{2} + C, \quad x = \operatorname{tg}\frac{y + x}{2} + C.$$

Потерянные решения

$$1 + \cos z = 0, \quad z = (2k + 1)\pi, \quad y = -x + (2k + 1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $x = \operatorname{tg}\dfrac{y + x}{2} + C$ и $y = -x + (2k + 1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Однородные уравнения

Определение 3. *Функция двух переменных $F(x,y)$ называется однородной степени n, если для всех x, y из области определения этой функции и всех допустимых k выполняется*

$$F(kx,ky)=k^nF(x,y).$$

П р и м е р ы

1) Функция

$$F(x,y)=x^2+xy+y^2$$

— однородная функция второй степени. Действительно

$$F(kx,ky)=(kx)^2+(kx)\cdot(ky)+(ky)^2=k^2(x^2+xy+y^2)=k^2F(x,y).$$

1) Функция

$$F(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

— однородная нулевой степени. Проверим это

$$F(kx,ky)=\frac{kx-ky}{kx+ky}=\frac{x-y}{x+y}=k^0\frac{x-y}{x+y}=k^0F(x,y),\ \text{если}\ k\neq 0.$$

3) Функция

$$F(x,y)=\sqrt{x+y}$$

— однородная степени $n=\dfrac{1}{2}$. В этом случае

$$F(kx,ky)=\sqrt{kx+ky}=k^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+y}=k^{\frac{1}{2}}F(x,y),\ \text{если}\ k>0.$$

Определение 4. *Уравнение*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

называется однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени.

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Преобразуем правую часть, используя однородность функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$,

$$-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=\frac{M\left(x,x\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(x,x\dfrac{y}{x}\right)}=\frac{x^nM\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{x^nN\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}=\frac{M\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Заменой $\dfrac{y}{x} = t$, где $t = t(x)$ — новая функция, уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными и интегрируется.

П р и м е р

Решить уравнение

$$(y^2 - 2xy)dx + (2x^2 + xy)dy = 0.$$

Р е ш е н и е. В этом уравнении множители перед dx и перед dy — однородные функции 2-й степени. Поэтому можно сделать замену $y = tx$. Имеем $dy = tdx + xdt$. После подстановки в уравнение получаем

$$(x^2t^2 - 2x^2t)dx + (2x^2 + x^2t)(tdx + xdt) = 0,$$

$$x^2[(t^2 - 2t)dx + (2 + t)(tdx + xdt)] = 0.$$

Отметим, что $x = 0$ — решение исходного уравнения, в чем убеждаемся простой проверкой. После этого сокращаем на x^2

$$(t^2 - 2t)dx + (2 + t)(tdx + xdt) = 0.$$

Приводим это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$2t^2dx + (2 + t)xdt = 0.$$

Разделяем переменные, поделив на xt^2, и интегрируем

$$\frac{2dx}{x} = -\frac{2 + t}{t^2}dt, \quad 2\int \frac{dx}{x} = \int \left(-\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt,$$

$$2\ln|x| = \frac{2}{t} - \ln|t| + \ln|C|, \ (C \neq 0), \quad 2\ln|x| + \ln|t| = \ln|C| + \frac{2}{t}.$$

Потенцируем последнее равенство

$$x^2t = C\,\mathrm{e}^{\frac{2}{t}}.$$

После обратной замены получаем общее решение

$$yx = C\,\mathrm{e}^{\frac{2x}{y}}, \quad C \neq 0.$$

После деления на xt^2 мы могли потерять решение $t = 0$ ($x = 0$ уже рассматривалось), что соответствует $y = 0$. Проверкой убеждаемся, что это также решение исходного дифференциального уравнения. Легко видеть, что $x = 0$ и $y = 0$ можно включить в общее решение при $C = 0$. Окончательно получаем

$$yx = C\,\mathrm{e}^{\frac{2x}{y}},$$

где C — любая постоянная.

Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ приводится к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $ax + by + c = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Если же эти уравнения не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$; следовательно, уравнение имеет вид $y' = F(ax + by)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax + by + c$).

Задачи для практических занятий

1.1. $xy\,dx + (x + 1)\,dy = 0.$

1.2. $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xy\,dy.$

1.3. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$

1.4. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0.$

1.5. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$

1.6. $xy' - y = (x + y)\ln\left(\dfrac{x + y}{x}\right).$

1.7. $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0.$

1.8. $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0.$

Домашнее задание

1.9. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$

1.10. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}.$

1.11. $2x^2yy' + y^2 = 2.$

1.12. $(x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$

1.13. $y^2 + x^2y' = xyy'.$

1.14. $xy' = y - x\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$

1.15. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$

1.16. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$

Ответы:

1.1. $y = C(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$, $x=-1$. **1.2.** $x = C\,\mathrm{e}^{\sqrt{y^2+1}}$. **1.3.** $y=(x-2)^3$, $y=0$. **1.4.** $y = x(Cx-1)$, $x=0$. **1.5.** $x^2 = y^2\ln Cx$, $y=0$. **1.6.** $\ln\dfrac{x+y}{x} = Cx$. **1.7.** $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$, $y=x+1$. **1.8.** $2x+y-1 = C\,\mathrm{e}^{2y-x}$. **1.9.** $y\,(\ln|x^2-1|+1)=1$. **1.10.** $y(1+x)=1$. **1.11.** $y^2-2 = C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. **1.12.** $y=-\dfrac{x}{2}-1$. **1.13.** $y = C\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$. **1.14.** $y=-x\ln(\ln Cx)$. **1.15.** $(y-x+5)^5(2y+x-2)=C$. **1.16.** $(y-x+2)^2+2x=C$.

Занятие 2. Линейные уравнения первого порядка Уравнения в полных дифференциалах

Линейное уравнение

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее первой производной, т.е. уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x),$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — некоторые непрерывные функции независимой переменной x.

Если $f(x)\equiv 0$, то линейное уравнение называется однородным. Если $f(x)\not\equiv 0$, то линейное уравнение называется неоднородным.

Метод вариации произвольной постоянной. Сначала интегрируется однородное линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

В этом уравнении переменные разделяются

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Интегрируя получаем

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln|C|, \quad y = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx},\ (C\neq 0).$$

При делении на y мы потеряли решение $y=0$, которое можно включить в общее решение при $C=0$. Итак

$$y = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx},$$

где C — любая постоянная.

Решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y' + p(x)y = f(x)$$

будем искать в виде

$$y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx},$$

заменяя в решении однородного уравнения произвольную постоянную C на функцию $C(x)$, которую мы и должны найти.

Подставляя предполагаемое решение в неоднородное уравнение, получаем

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = f(x)$$

или

$$C'(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}.$$

Откуда, интегрируя, находим

$$C(x) = \int f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,dx + C_1.$$

Примеры

1) Решить уравнение

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin x.$$

Решение. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dy}{dx} = -y\,\mathrm{tg}\,x, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx, \quad \int\frac{dy}{y} = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x}, \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|,$$

$$y = C\cos x.$$

Заменяя постоянную C на функцию $C(x)$, решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)\cos x.$$

Подставляем эту функцию и ее производную $y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$ в неоднородное уравнение

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\frac{\sin x}{\cos x} = \sin x.$$

Заметим, что если в ходе решения мы не делаем никаких ошибок, то выражения, содержащие $C(x)$, должны уничтожаться. Из предыдущего соотношения имеем уравнение для нахождения функции $C(x)$

$$C'(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Откуда следует

$$C(x) = -\ln|\cos x| + C,$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя найденную функцию $C(x)$ в выражение $y = C(x)\cos x$, в виде которого ищем решение неоднородного уравнения, получаем общее решение этого уравнения

$$y = (C - \ln|\cos x|)\cos x.$$

2) Решить уравнение

$$(2\,\mathrm{e}^y - x)y' = 1.$$

Р е ш е н и е. В этом уравнении только переменная x находится в первой степени. Рассматривая его как уравнение относительно $x(y)$ и учитывая, что $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$, это уравнение приводим к линейному относительно функции $x(y)$

$$x' + x = 2\,\mathrm{e}^y.$$

Решаем однородное уравнение

$$x' + x = 0.$$

Имеем

$$\frac{dx}{dy} = -x, \quad \frac{dx}{x} = -dy, \quad \ln|x| = -y + \ln|C|, \quad x = C\,\mathrm{e}^{-y}.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$x = C(y)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

Подставляя в неоднородное уравнение, получаем

$$C'(y)\,\mathrm{e}^{-y} - C(y)\,\mathrm{e}^{-y} + C(y)\,\mathrm{e}^{-y} = 2\,\mathrm{e}^y,$$
$$C'(y) = 2\,\mathrm{e}^{2y}, \quad C(y) = \mathrm{e}^{2y} + C, \quad x = (\mathrm{e}^{2y} + C)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

Окончательно заключаем, что общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x = C\,\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^y.$$

Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y).$$

Прежде всего мы должны научиться распознавать уравнения в полных дифференциалах.

Предположим, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$, входящие в уравнение, имеют непрерывные частные производные и пусть

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

т.е. одновременно выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

Дифференцируя первое равенство по y, а второе по x,получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

и так как смешанные частные производные непрерывны, то они равны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

и мы получаем условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

при котором уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

будет уравнением в полных дифференциалах.

Пусть теперь

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y).$$

Тогда уравнение в полных дифференциалах принимает вид

$$du(x,y)=0$$

и, следовательно,

$$u(x,y)=C,$$

где C — произвольная постоянная, является общим интегралом исходного уравнения.

Таким образом, решение уравнения в полных дифференциалах сводится к нахождению функции $u(x,y)$.

П р и м е р

Решить уравнение

$$(2x+\sin y)dx+(x\cos y-\sin y)dy=0.$$

Р е ш е н и е. Выясним сначала будет ли это уравнение в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x+\sin y)=\cos y,$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y-\sin y)=\cos y.$$

Условие $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ выполняется, и это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x,y)$ из условий

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y - \sin y.$$

Интегрируем по x первое из этих равенств, считая y постоянным, но вместо постоянной интегрирования мы поставим функцию $\varphi(y)$, которую в дальнейшем нужно определить. Имеем

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \int (2x + \sin y)\,dx = x^2 + x\sin y + \varphi(y).$$

Подставляя это выражение для $u(x,y)$ во второе равенство $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\cos y - \sin y$, находим функцию $\varphi(y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + x\sin y + \varphi(y)) = x\cos y - \sin y, \quad \varphi'(y) = -\sin y, \quad \varphi(y) = \cos y.$$

Следовательно, $u(x,y) = x^2 + x\sin y + \cos y$, и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x^2 + x\sin y + \cos y = C.$$

Задачи для практических занятий

2.1. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$.

2.2. $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

2.3. $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$.

2.4. $(1 - 2xy)y' = y(y-1)$.

2.5. $(2 - 9xy^2)x\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0$.

2.6. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$.

2.7. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.

2.8. $(1 + y^2\sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$.

Домашнее задание

2.9. $xy' - 2y = 2x^4$.

2.10. $y = x(y' - x\cos x)$.

2.11. $(2\,\mathrm{e}^y - x)\,y' = 1$.

2.12. $y' + 2y = y^2\,\mathrm{e}^x$.

2.13. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$ **2.14.** $\mathrm{e}^{-y}\,dx - (2y + x\,\mathrm{e}^{-y})\,dy = 0.$

2.15. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3+5y}{y^3}\,dy = 0.$

Ответы:

2.1. $y = C\cos x + \sin x$. **2.2.** $y = \dfrac{C - \ln|x|}{x}$. **2.3.** $x = (C - \cos y)\sin y$. **2.4.** $x = \dfrac{C + y - \ln|y|}{(y-1)^2}$, $y = 0$, $y = 1$. **2.5.** $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$. **2.6.** $y\ln x + \dfrac{y^4}{4} = C$. **2.7.** $\dfrac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}} + x^2 = C$. **2.8.** $x - y^2\cos^2 x = C$. **2.9.** $y = Cx^2 + x^4$. **2.10.** $y = x(\sin x + C)$. **2.11.** $x = C\,\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}$. **2.12.** $\dfrac{1}{y} = (C + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2x}$, $y = 0$. **2.13.** $x^2y - \dfrac{y^3}{3} = C$. **2.14.** $x\,\mathrm{e}^{-y} - y^2 = C$. **2.15.** $\dfrac{x^3}{y^2} + x + \dfrac{5}{y} = C$.

Занятие 3. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения. Уравнения Лагранжа и Клеро

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной,

$$F(x, y, y') = 0,$$

можно решать следующими методами.

1) Разрешить относительно y'. Тогда получаем одно или несколько уравнений

$$y' = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Интегрируя эти уравнения, найдем решение исходного уравнения.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$y'^{\,2} - 2xy' - 8x^2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Решая это уравнение как квадратное относительно y'

$$y' = x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2} = x \pm 3x,$$

получаем два дифференциальных уравнения, разрешенные относительно производной,

$$y' = 4x, \qquad y' = -2x.$$

Интегрируя их, находим

$$y = 2x^2 + C, \qquad y = -x^2 + C.$$

2) Если уравнение имеет вид

$$x = \varphi(y'),$$

то полагая $y' = p$, получаем $x = \varphi(p)$. Для нахождения y используем соотношение

$$dy = y'\,dx.$$

Тогда $dy = p\,\varphi'(p)\,dp$ и $y = \displaystyle\int p\,\varphi'(p)\,dp + C$. В итоге получим параметрическое задание интегральных кривых

$$\begin{cases} x = \varphi(y'), \\ y = \displaystyle\int p\,\varphi'(p)\,dp + C. \end{cases}$$

Аналогично, если уравнение имеет вид

$$y = \psi(y'),$$

то полагая $y' = p$ и учитывая, что $dx = \dfrac{dy}{y'}$, будем иметь

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\psi'(p)}{p}\,dp + C, \\ y = \psi(p). \end{cases}$$

3) Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно y,

$$y = f(x, y'),$$

то полагая $y' = p$, получим

$$y = f(x, p).$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей этого равенства и заменив dy через $p\,dx$, получим уравнение вида

$$M(x, p)\,dx + N(x, p)\,dy = 0.$$

Если $x = \varphi(x, C)$ — интеграл этого уравнения, то воспользовавшись равенством $y = f(x, p)$, получим решение исходного уравнения в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(x, C), \\ y = f(\varphi(x, C), p). \end{cases}$$

В качестве примера применения этого метода рассмотрим решение уравнения Лагранжа.

4) *Уравнение Лагранжа.* Уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'),$$

в котором y является линейной функцией от x с коэффициентами, зависящими от y', называется уравнением Лагранжа. С помощью параметризации $y' = p$ оно сводится к линейному уравнению первого порядка относительно функции $x = x(p)$.

П р и м е р 2. Решить уравнение Лагранжа

$$y = 2xy' - {y'}^2$$

Р е ш е н и е. Полагая $y' = p$, имеем

$$y = 2xp - p^2, \quad dy = 2p\,dx + 2x\,dp - 2p\,dp,$$
$$p\,dx = 2p\,dx + (2x - 2p)\,dp, \quad p\frac{dx}{dp} + 2x = 2p, \quad x'(p) + \frac{2}{p}x = 2 \ (p \neq 0),$$
$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p^3, \quad y = \frac{2C}{p} + \frac{4}{3}p^4 - p^2.$$

Потерянное решение при $p = 0$. Подставив $p = 0$ в равенство $y = 2xp - p^2$, получим частное решение $y = 0$.

5) *Уравнение Клеро.* Если в уравнении Лагранжа положить $\varphi(y') = y'$, то получим уравнение Клеро
$$y = xy' + \psi(y'),$$
общее решение которого получается заменой в нем переменной y' на произвольную постоянную C:
$$y = xC + \psi(C).$$

6) *Особые решения.* Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки. Обычно особое решение находят исключая y' из системы

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}. \end{cases}$$

Другой способ отыскания особого решения заключается в следующем: Если семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, являющихся решением уравнения $F(x, y, y') = 0$, имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то эта огибающая будет особым решением того же уравнения. Для отыскания огибающей надо исключить C из системы

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$y = xy' + y'^2.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Клеро. Заменяя y' на C, получаем общее решение

$$y = xC + C^2.$$

Ищем особое решение. Дифференцируем уравнение по y' и затем исключаем его из системы

$$\begin{cases} y = xy' + y'^2, \\ x + 2y' = 0. \end{cases}$$

Получим $y = -\dfrac{x^2}{4}$. Подставляя в исходное уравнение убеждаемся, что это решение. Таким образом, $y = -\dfrac{x^2}{4}$ — особое решение.

Задачи для практических занятий

3.1. $y'^2 - y^2 = 0$.

3.2. $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2$.

3.3. $y^2(y'^2 + 1) = 1$.

3.4. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.

3.5. $x = y'^3 + y'$.

3.6. $y = y'^2 + 2y'^3$.

3.7. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

3.8. $xy' - y = \ln y'$.

Домашнее задание

3.9. $8y'^3 = 27y$.

3.10. $xy'^2 = y$.

3.11. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.

3.12. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$.

3.13. $y = \ln(1 + y'^2)$.

3.14. $2y'^2(y - xy') = 1$.

3.15. $2xy' - y = \ln y'$.

Ответы:

3.1. $y = C\,\mathrm{e}^{\pm x}$. **3.2.** $y = -x + (x + C)^3$. $y = -x$. **3.3.** $(x + C)^2 + y^2 = 1$, $y = \pm 1$. **3.4.** $x^2 + C^2 = 2Cy$, $y = \pm x$. **3.5.** $x = p^3 + p$, $y = \dfrac{3}{4}p^4 + \dfrac{p^2}{2} + C$. **3.6.** $x = 2p + 3p^2 + C$, $y = p^2 + 2p^3$; $y = 0$. **3.7.** $x = \dfrac{C + \ln|p|}{\sqrt{p}}$, $y = -(C + \ln|p|)\sqrt{p} + 4\sqrt{p}$; $y = 0$. **3.8.** $y = xC - \ln C$, $y = 1 + \ln x$. **3.9.** $y^2 = (x + C)^3$, $y = 0$. **3.10.** $(y - x)^2 = 2C(x + y) - C^2$, $y = 0$. **3.11.** $y = C\,\mathrm{e}^x$, $y = x - 1 + C\,\mathrm{e}^{-x}$. **3.12.** $x = p\sqrt{p^2 + 1}$, $y = \dfrac{1}{3}(2p^2 - 1)\sqrt{p^2 + 1} + C$. **3.13.** $x = 2\,\mathrm{arctg}\,p + C$, $y = \ln(1 + p^2)$; $y = 0$. **3.14.** $2C^2(y - Cx) = 1$, $8y^3 = 27x^2$. **3.13.** $x = \dfrac{p + C}{p^2}$, $y = \dfrac{2(p + C)}{p} - \ln p$.

Занятие 4. Интегрирование уравнений с помощью тригонометрической или гиперболической параметризации

1) В некоторых случаях уравнение

$$F(x, y') = 0$$

удается решить с помощью параметризации $y' = \psi(t)$, тогда $x = \varphi(t)$. Если возможна параметризация $x = \varphi(t)$, то $y' = \psi(t)$. Так как $dy = y'\,dx$, то $dy = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$, откуда $y = \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C$ и, следовательно, интегральные кривые определяются в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C. \end{cases}$$

П р и м е р 1. Решить уравнение $x\sqrt{1+y'^2} = y'$.

Р е ш е н и е. Полагаем $y' = \operatorname{tg} t$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$; тогда

$$x = \sin t, \quad dy = y'\,dx = \operatorname{tg} t \cos t\,dt = \sin t\,dt, \quad y = -\cos t + C.$$

Исключая t из системы

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\cos t + C, \end{cases}$$

получаем $x^2 + (y - C)^2 = 1$ — семейство окружностей.

2) Аналогично, полагая в уравнении

$$F(y, y') = 0$$

$y' = \psi(t)$ (или $y = \varphi(t)$) и используя соотношение $dx = \dfrac{dy}{y'}$, получим решение уравнения в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\frac{y}{\sqrt{1+9y'^2}} = 3.$$

Р е ш е н и е. Полагаем $y' = \dfrac{1}{3}\operatorname{sh} t$, тогда

$$y = 3\operatorname{ch} t, \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{3\operatorname{sh} t}{\frac{1}{3}\operatorname{sh} t} = 9\,dt, \quad x = 9t + C$$

или, исключая параметр t, получаем $y = 3\operatorname{ch}\dfrac{x - C}{9}$.

Задачи для практических занятий

4.1. $y'^2 = x^2(1+y'^2)$, $y' = \operatorname{tg} t$.

4.2. $y = \sqrt{1+y'^2}$, $\quad y' = \operatorname{sh} t$.

4.3. $y(1+y'^2) = 2$, $\quad y' = \operatorname{ctg} t$.

4.4. $y'^2 + 16y^2 = 1$, $\quad 4y = \sin t$.

4.5. $y' = \sqrt{1+4y^2}$, $\quad 2y = \operatorname{sh} t$.

4.6. $xy' = \sqrt{1+y'^2}$, $\quad y' = \operatorname{sh} t$.

4.7. $x^2 y'^2 = \dfrac{1-y'}{1+y'}$, $\quad y' = \cos 2t$.

4.8. $x^2 = \dfrac{4-y'^2}{y'^2}$, $\quad y' = 2\sin t$.

Домашнее задание

4.9. $\sqrt{4+y'^2} - y = 0$.

4.10. $(4+y'^2)4y = 1$.

4.11. $y^2 + 16y'^2 = 1$.

4.12. $y^2 - 4y'^2 - 4 = 0$.

4.13. $2xy' = \sqrt{4+y'^2}$.

4.14. $y'^2(1+x^2) = 9$.

4.15. $x^2 = \dfrac{1-y'^2}{y'^2}$.

4.16. $x^2 = \dfrac{1-y'}{1+y'}\, y'^2$.

Ответы:

4.1. $x^2 + (y-C)^2 = 1$. **4.2.** $y = \operatorname{ch}(x+C)$. **4.3.** $x = 2t - \sin 2t + C$, $y = 1 - \cos 2t$. **4.4.** $y = \dfrac{1}{4}\sin(4x+C)$. **4.5.** $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(2x+C)$. **4.6.** $y = -\ln|x \pm \sqrt{x^2-1}| + C$. **4.7.** $x = \dfrac{z(1+z^2)}{1-z^2}$, $y = 2\operatorname{arctg} z + z + \ln\left|\dfrac{1-z}{1+z}\right| + C$. **4.8.** $y = \ln|x \pm \sqrt{x^2+1}| + C$. **4.9.** $y = 2\operatorname{ch}(x+C)$. **4.10.** $x = \dfrac{1}{32}\left(t + \dfrac{\sin 2t}{2}\right) + C$, $y = \dfrac{1}{32}(1+\cos 2t)$. **4.11.** $y = \cos\left(\dfrac{x}{4} + C\right)$. **4.12.** $y = \pm 2\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2} + C\right)$. **4.13.** $y = \ln|2x \pm \sqrt{4x^2-1}| + C$. **4.14.** $y = 9\ln|x \pm \sqrt{x^2+9}| + C$. **4.15.** $y = \ln|x \pm \sqrt{x^2+1}| + C$. **4.16.** $x = \cos 2t \operatorname{tg} t$, $y = \dfrac{1}{4}\sin 4t + \operatorname{tg} t - t + C$.

Занятие 5. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся приемы понижения степени уравнений.

1) Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до $k-1$ порядка включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

В этом случае порядок уравнения может быть понижен заменой $y^{(k)}(x) = z(x)$.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x.$$

Р е ш е н и е. Заменой $z = y''$ приведем это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$z' = 2(z-1)\operatorname{ctg} x.$$

Интегрируя его, будем иметь:

$$\frac{dz}{z-1} = 2\operatorname{ctg} x\, dx \quad (z \neq 1)$$
$$\ln|z-1| = 2\ln|\sin x| + \ln|C_1|,$$
$$z - 1 = C_1 \sin^2 x.$$

Возвращаемся к переменной y

$$y'' = C_1 \sin^2 x + 1.$$

Откуда, последовательно интегрируя, получим общее решение

$$y' = \frac{C_1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx + x + C_2 = \frac{C_1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + x + C_2,$$
$$y = \frac{C_1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{4}\right) + \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Легко видеть, что потерянное решение

$$z = 1, \quad y'' = 1, \quad y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

входит в общее решение.

2) В уравнение не входит независимое переменное x:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В этом случае порядок уравнения можно понизить, взяв за независимое переменное y, а за неизвестную функцию $p(y)$, определяемую равенством $y' = p(y)$.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$2yy'' = y'^{\,2} + 1.$$

Р е ш е н и е. В уравнение не входит x. Полагаем $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = (y')' = (p(y))' = p'(y)y' = p'p$$

и уравнение принимает вид

$$2ypp' = p^2 + 1.$$

Решив это уравнение, найдем $p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Следовательно, $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Откуда последовательно получаем

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx, \quad \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2,$$
$$4(C_1 y - 1) = C_1^2(x + C_2)^2.$$

3) Уравнение, обе части которого являются полными производными. После интегрирования такого уравнения порядок понижается.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$y'' = \frac{2yy'^2}{1 + y^2}.$$

Р е ш е н и е. Разделив обе части уравнения на y', получим

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1 + y^2}, \quad (\ln|y'|)' = (\ln(1 + y^2))', \quad \ln|y'| = \ln(1 + y^2) + \ln|C_1|$$
$$y' = C_1(1 + y^2), \quad \operatorname{arctg} y = C_1 x + C_2.$$

4) Уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

однородно относительно аргументов y, y', …, $y^{(n)}$, т.е. не меняется при одновременной замене $y, y', \ldots, y^{(n)}$ на $ky, ky', \ldots, ky^{(n)}$. В этом случае порядок уравнения понижается на единицу, если положить

$$y' = yz,$$

где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция.

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$x^2yy'' = (y - xy')^2.$$

Р е ш е н и е. Полагая $y' = yz$, имеем $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$. Подставляем выражения для y' и y'' в исходное уравнение

$$x^2y^2(z^2 + z') = (y - xyz)^2,$$
$$x^2y^2z^2 + x^2y^2z' = y^2 - 2xy^2z + x^2y^2z^2,$$
$$x^2y^2z' = y^2(1 - 2xz).$$

После сокращения на y^2, приходим к линейному уравнению первого порядка

$$x^2z' + 2xz = 1.$$

Решая его методом вариации произвольной постоянной, получаем

$$z = \frac{x + C_1}{x^2}.$$

После обратной замены $z = \dfrac{y'}{y}$ видим, что степень уравнения понизилась на единицу:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x + C_1}{x^2}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right) dx, \quad \ln|y| = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln|C_2|,$$

$$y = C_2 x \,\mathrm{e}^{-\frac{C_1}{x}}.$$

После сокращения на y^2 мы могли потерять решение $y = 0$. Это решение включается в общее при $C_2 = 0$.

5) Уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

называется *обобщенным однородным*, если существует такое число m, что уравнение не меняется при одновременной замене x на kx, y на $k^m y$, y' на $k^{m-1}y'$, y'' на $k^{m-2}y''$ и т.д. Чтобы узнать, будет ли уравнение обобщенным однородным, и найти число m, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число k будет входить в каждый член уравнения после указанной замены.

После того, как число m найдено, надо сделать замену переменных

$$x = \mathrm{e}^t, \quad y = z(t)\,\mathrm{e}^{mt},$$

где $z(t)$ — новая неизвестная функция, а t — новое независимое уравнение. Порядок полученного уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

П р и м е р 5. Решить уравнение

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y - 5x^2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Заменяем в уравнении x на kx, y на $k^m y$, y' на $k^{m-1}y'$, y'' на $k^{m-2}y''$

$$k^2 x^2 k^{m-2} y'' + 2kxk^{m-1}y' - 6k^m y - 5k^2 x^2 = 0.$$

Приравниваем показатели степеней для k в каждом слагаемом

$$2 + m - 2 = 1 + m - 1 = m = 2.$$

Таким образом $m = 2$ и надо сделать замену

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t, \\ y = z\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

Вычисляем производные $y'(x)$ и $y''(x)$:

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'\,\mathrm{e}^{2t} + 2z\,\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t} = (z' + 2z)\,\mathrm{e}^t,$$
$$y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(z'' + 2z')\,\mathrm{e}^t + (z' + 2z)\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t} = z'' + 3z' + 2z.$$

Подставляем найденные значения производных и $x = \mathrm{e}^t$ в уравнение

$$\mathrm{e}^{2t}(z'' + 3z' + 2z) + 2\,\mathrm{e}^{2t}(z' + 2z) - 6z\,\mathrm{e}^{2t} - 5\,\mathrm{e}^{2t} = 0.$$

После сокращения на e^{2t} и простых преобразований получаем уравнение

$$z'' + 5z' = 5,$$

которое после замены $z' = u$ приводится к линейному уравнению первого порядка

$$u' + 5u = 5.$$

Общее решение последнего имеет вид $u = C_1\,\mathrm{e}^{-5t} + 1$. Откуда следует

$$z' = C_1\,\mathrm{e}^{-5t} + 1, \quad z = -\frac{C_1}{5}\,\mathrm{e}^{-5t} + t + C_2.$$

Таким образом, получаем параметрическое решение исходного уравнения

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t, \\ y = \mathrm{e}^{2t}\left(-\dfrac{C_1}{5}\,\mathrm{e}^{-5t} + t + C_2\right). \end{cases}$$

Задачи для практических занятий

5.1. $x^2y'' = y'^{\,2}$.

5.2. $y^3y'' = 1$.

5.3. $y'' = 2yy'$.

5.4. $y'y''' = 2y''^{\,2}$.

5.5. $y'' = xy' + (y + 1)$.

5.6. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

5.7. $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$.

Домашнее задание

5.8. $2xy'y'' = y'^{\,2} - 1$.

5.9. $y'^{\,2} + 2yy'' = 0$.

5.10. $yy'' = y'(y' + 1)$.

5.11. $5y'''^{\,2} - 3y''y^{\mathrm{IV}} = 0$.

5.12. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$. **5.13.** $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.

Ответы:

5.1. $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x+1| + C_2$, $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C$, $y = C$. **5.2.** $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$. **5.3.** $y = C_1 \operatorname{tg}(C_1x + C_2)$, $\ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1x + C_2$, $y(C - x) = 1$, $y = C$. **5.4.** $y = \dfrac{1}{C_1}\ln|C_1x + C_2| + C_3$, $y = C_1x + C_2$. **5.5.** $y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1\displaystyle\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + C_2\right) - 1$. **5.6.** $y = C_2\,\mathrm{e}^{C_1x^2}$. **5.7.** $y = x^2\left(-\dfrac{1}{2}\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2\right)$. **5.8.** $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$, $y = \pm x + C$. **5.9.** $y^3 = (C_1x + C_2)^2$, $y = C$. **5.10.** $C_1y - 1 = C_2\,\mathrm{e}^{C_1x}$, $y = -x + C$, $y = 0$. **5.11.** $y = \pm\dfrac{4}{C_1^2}\sqrt{C_1x + C_2} + C_3x + C_4$, $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$. **5.12.** $\ln C_2y = 4x^{\frac{5}{2}} + C_1x$, $y = 0$. **5.13.** $y = -x\ln(C_2\,\ln C_1x)$, $y = Cx$.

Занятие 6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные вещественные числа. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0.$$

Такое уравнение называют однородным. Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется неоднородным.

Решение неоднородного уравнения складывается из общего решения $y = y_0(x)$ однородного уравнения и частного решения $y = y_{\text{ч}}(x)$ решения неоднородного уравнения:

$$y = y_0(x) + y_{\text{ч}}(x).$$

Нахождение решения однородного уравнения непосредственно связано с решением его характеристического (алгебраического) уравнения:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Каждый корень λ это уравнения вносит “вклад” в общее решение в виде слагаемого.

Если λ — простой действительный корень, то этот "вклад" равен

$$y_0(x) = \dots + C_1 \, e^{\lambda x} + \dots$$

Если λ — действительный корень кратности k, то этот "вклад" равен

$$y_0(x) = \dots + (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \, e^{\lambda x} + \dots$$

Если $\lambda_{1,2} = a \pm i\, b$ — простые комплексно-сопряженные корни, то "вклад" в решение равен

$$y_0(x) = \dots + \, e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) + \dots$$

Если $\lambda_{1,2} = a \pm i\, b$ — комплексно-сопряженные корни кратности k, то "вклад" в решение равен

$$y_0(x) = \dots + \, e^{ax}((C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos bx + \\ +(C_{k+1} + C_{k+2} x + \dots + C_{2k} x^{k-1}) \sin bx) + \dots$$

Например, если все корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 5$, $\lambda_{5,6} = \lambda_{7,8} = 2 \pm 3i$, $\lambda_{9,10} = \pm 8i$, то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_0(x) = C_1 \, e^{-x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) \, e^{5x} + \\ + e^{2x}((C_5 + C_6 x) \cos 3x + (C_7 + C_8 x) \sin 3x) + C_9 \cos 8x + C_{10} \sin 8x.$$

Одним из методов нахождения частного решения неоднородного уравнения является так называемый метод неопределенных коэффициентов.

Для некоторых функций $f(x)$ специального вида удается подобрать частное решение этого уравнения и тем самым свести задачу об интегрировании неоднородного уравнения к интегрированию соответствующего однородного уравнения. Рассмотрим такие возможные случаи.

Правило 1. *Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид*

$$f(x) = \, e^{\alpha x}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n).$$

Тогда, если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения нужно искать в таком же виде

$$y_ч = \, e^{\alpha x} Q_n(x) = \, e^{\alpha x}(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n),$$

где A_0, A_1,...,A_n — неопределенные коэффициенты, подлежащие определению.

Если же α является корнем характеристического уравнения кратности k, то частное решение надо искать в виде

$$y_ч = x^k \, e^{\alpha x} Q_n(x) = x^k \, e^{\alpha x}(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n).$$

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 - 6x.$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Тогда

$$y' = 2Ax + B, \qquad y'' = 2A.$$

Подставляя функцию и ее производные в уравнение, получаем

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 6x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -2A - 2B = -6 \\ 2A - B - 2C = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$A = -1, \quad B = 4, \quad C = -3.$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{ч}}(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2,$$

$$y_{\text{о}}(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x} - x^2 + 4x - 3.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = (x+2)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, ни один из которых не равен $\alpha = 3$. Частное решение ищем в виде

$$y = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Подставляя в уравнение эту функцию и ее производные

$$y' = (3Ax + 3B + A)\,\mathrm{e}^{3x}, \qquad y'' = (9Ax + 9B + 6A)\,\mathrm{e}^{3x},$$

получаем после сокращения на e^{3x}

$$9Ax + 9B + 6A + 2(3Ax + 3B + A) - 3(Ax + B) = x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим коэффициенты A и B

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 8A + 12B = 2, \end{cases} \qquad A = \frac{1}{12}, \quad B = \frac{1}{9}.$$

Общее решение исходного уравнения равно

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x} + \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = 6x\,\mathrm{e}^{x}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ кратности $k = 2$. Число $\alpha = 1$ совпадает с корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = x^2(Ax + B)\,\mathrm{e}^{x}.$$

Подставляя в уравнение функцию $y = (Ax^3 + Bx^2)\,\mathrm{e}^{x}$ и ее производные

$$y' = [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]\,\mathrm{e}^{x},$$

$$y'' = [Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B]\,\mathrm{e}^{x},$$

получим (после сокращения на e^{x})

$$Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B) + 2B - 2(Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx) +$$
$$+ Ax^3 + Bx^2 = 6x,$$

или после упрощений

$$6Ax + 2B = 6x.$$

Откуда находим $A = 1$ и $B = 0$.

Частное решение неоднородного уравнения равно

$$y_{\text{ч}}(x) = x^3\,\mathrm{e}^{x}.$$

Общее решение этого же уравнения равно

$$y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{x} + x^3\,\mathrm{e}^{x}.$$

Правило 2. *Правая часть неоднородного уравнения равна*

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m.

Если числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде

$$y_ч = e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x),$$

где $\tilde{P}_s(x)$ и $\tilde{Q}_s(x)$ — многочлены с неизвестными коэффициентами, степень которых s равна наибольшей степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, $s = \max\{n, m\}$.

Если же $\alpha \pm \beta i$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде

$$y_ч = x\, e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x),$$

где $s = \max\{n, m\}$.

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 9 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 3$. В данном случае число $\alpha + i\beta = 3 + i$ не является корнем характеристического уравнения. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x).$$

Вычислим производные от этой функции

$$\begin{gathered}
y' = 3\,e^{3x}(A\cos x + B\sin x) + e^{3x}(-A\sin x + B\cos x) = \\
= e^{3x}((3A+B)\cos x + (3B-A)\sin x), \\
y'' = 3\,e^{3x}((3A+B)\cos x + (3B-A)\sin x) + \\
+ e^{3x}(-(3A+B)\sin x + (3B-A)\cos x) = \\
= e^{3x}((8A+6B)\cos x + (8B-6A)\sin x).
\end{gathered}$$

Подставляя предполагаемое решение и его вторую производную в уравнение, получаем

$$e^{3x}((8A+6B)\cos x + (8B-6A)\sin x) - 9\,e^{3x}(A\cos x + B\sin x) = e^{3x}\cos x,$$

или после упрощений

$$(-A+6B)\cos x + (-6A-B)\sin x = \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, находим коэффициенты A и B

$$\begin{cases} -A + 6B = 1 \\ -6A - B = 0, \end{cases} \qquad A = -\frac{1}{37}, \quad B = \frac{6}{37}.$$

Таким образом частное решение найдено

$$y_{ч} = e^{3x}\left(-\frac{1}{37}\cos x + \frac{6}{37}\sin x\right).$$

Общее решение неоднородного уравнения равно

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(-\frac{1}{37}\cos x + \frac{6}{37}\sin x\right).$$

П р и м е р 5. Решить уравнение

$$y'' + y = x\sin x.$$

В этом уравнении правая часть может быть записана так

$$x\sin x = e^{0x}\cdot x\sin x.$$

Таким образом $\alpha = 0$, $\beta = 1$, и число $\alpha + i\beta = i$ совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda^2+1 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$$

Находим вторую производную

$$\begin{gathered}
y = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x,\\
y' = (2Ax + B)\cos x + (2Cx + D)\sin x-\\
-(Ax^2 + Bx)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x =\\
= (Cx^2 + (2A + D)x + B)\cos x + (-Ax^2 + (2C - B)x + D)\sin x,\\
y'' = (2Cx + 2A + D)\cos x + (-2Ax + 2C - B)\sin x-\\
-(Cx^2 + (2A + D)x + B)\sin x + (-Ax^2 + (2C - B)x + D)\cos x =\\
= (-Ax^2 + (4C - B)x + 2A + 2D)\cos x+\\
+(-Cx^2 + (-4A - D)x + 2C - 2B)\sin x.
\end{gathered}$$

Подставляем y'' и y в уравнение

$$\begin{gathered}
(-Ax^2 + (4C - B)x + 2A + 2D)\cos x+\\
+(-Cx^2 + (-4A - D)x + 2C - 2B)\sin x+\\
+(Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x = x\sin x.
\end{gathered}$$

После упрощений получаем

$$(4Cx + 2A + 2D)\cos x + (-4Ax + 2C - 2B)\sin x = x\sin x.$$

Для нахождения A, B, C и D приравняем сначала коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$

$$\begin{cases} 4Cx + 2A + 2D = 0\\ -4Ax + 2C - 2B = x,\end{cases}$$

а затем при одинаковых степенях x

$$4C = 0, \quad 2A + 2D = 0, \quad -4A = 1, \quad 2C - 2B = 0.$$

Откуда следует

$$A = -\frac{1}{4}, \quad C = B = 0, \quad D = \frac{1}{4}.$$

Частное решение имеет вид

$$y_ч = x\left(-\frac{x}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x\right).$$

Окончательно можем записать общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{4}(\sin x - x\cos x).$$

И отметим наконец, что если правая часть неоднородного уравнения представляет из себя сумму функций, например, уравнение имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x),$$

то решение уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и частных решений неоднородных уравнений

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x).$$

Задачи для практических занятий

6.1. $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 2x$.

6.2. $y'' + 4y' = 9x$.

6.3. $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$.

6.4. $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-2x}$.

6.5. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$.

6.6. $y'' - 2y' = x\,\mathrm{e}^{2x}$.

6.7. $y'' - 7y' + 6y = \sin 3x$.

6.8. $y'' + y = 4(\sin x + \cos x)$.

6.9. $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{x}\cos x$.

Домашнее задание

6.10. $y'' + y = \mathrm{e}^{x}$.

6.11. $y'' - 3y' + 2y = 10\,\mathrm{e}^{-x}$.

6.12. $y'' - 5y' + 6y = 2x^2$.

6.13. $y'' - 7y' + 4y = \sin x$.

6.14. $y'' - 4y' + 4y = \cos 2x$.

6.15. $y'' + 9y = \cos 3x$.

6.16. $y'' + y' = x^2 + 2x$.

6.17. $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$.

6.18. $y'' + y = (4x - 3)\,\mathrm{e}^{x}$.

Ответы:

6.1 $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)$. **6.2.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{9}{16}(2x^2 - x)$.**6.3.** $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \dfrac{1}{17}\,\mathrm{e}^{3x}$. **6.4.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{1}{3}x\,\mathrm{e}^{-x}$. **6.5.** $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{x}$. **6.6.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{4}(x^2 - x)\,\mathrm{e}^{2x}$. **6.7.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{6x} + \dfrac{1}{150}(7\cos 3x - \sin 3x)$. **6.8.** $y = \mathbb{C}_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x(\sin x - \cos x)$. **6.9.** $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{x}(\cos x + \sin x)$. **6.10.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$. **6.11.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$. **6.12.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{34}(18x^2 + 30x + 19)$. **6.13.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{7+\sqrt{33}}{2}x} + C_2\,\mathrm{e}^{\frac{7-\sqrt{33}}{2}x} + \dfrac{1}{58}(3\sin x + 7\cos x)$. **6.14.** $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{8}\sin 2x$. **6.15.** $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \dfrac{x}{6}\sin 3x$. **6.16.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^3}{3}$. **6.17.** $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{3x}$. **6.18.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2}(4x - 7)\,\mathrm{e}^{x}$.

Занятие 7. Операторный метод решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Обозначим через D оператор дифференцирования, $D = \dfrac{d}{dx}$. Тогда $\dfrac{d^ky}{dx^k} = D^ky$, и уравнение

$$a_0y^{(n)} + a_1Y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

запишем в операторном виде

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = f(x)$$

или

$$F(D)y = f(x),$$

где $F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$ — операторный многочлен.

Характеристическое уравнение однородного уравнения можно записать в виде (роль λ выполняет также D)

$$a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n = 0.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищется с помощью обратного оператора $\dfrac{1}{F(D)}$

$$y = \frac{1}{F(D)} f(x).$$

Для обратного оператора справедливы следующие свойства

1) $\dfrac{1}{F(D)} c f(x) = c \dfrac{1}{F(D)} f(x)$, c — постоянная,

2) $\dfrac{1}{F(D)} (f_1(x) + f_2(x)) = \dfrac{1}{F(D)} f_1(x) + \dfrac{1}{F(D)} f_2(x)$,

3) $\dfrac{1}{F_1(D)} \cdot \dfrac{1}{F_2(D)} f(x) = \dfrac{1}{F_2(D)} \cdot \dfrac{1}{F_1(D)} f(x)$,

4) $\dfrac{1}{F_1(D) \cdot F_2(D)} f(x) = \dfrac{1}{F_1(D)} \cdot \dfrac{1}{F_2(D)} f(x) = \dfrac{1}{F_1(D)} \left[\dfrac{1}{F_2(D)} f(x) \right]$,

5) $\dfrac{\Phi(D)}{F(D)} f(x) = \Phi(D) \dfrac{1}{F(D)} f(x) = \dfrac{1}{F(D)} \Phi(D) f(x)$,

6) $\dfrac{1}{D} f(x) = \displaystyle\int f(x)\, dx$.

При отыскании частного решения помимо этих свойств используются формулы:

7) $\dfrac{1}{F(D)}\, \mathrm{e}^{kx} = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{F(k)}$, если $F(k) \neq 0$,

8) $\dfrac{1}{F(D^2)} \sin ax = \dfrac{\sin ax}{F(-a^2)}$, $\quad \dfrac{1}{F(D^2)} \cos ax = \dfrac{\cos ax}{F(-a^2)}$, $\quad F(-a^2) \neq 0$,

9) $\dfrac{1}{F(D)} 1 = \dfrac{1}{a_n}$,

10) $\dfrac{1}{F(D)}\, \mathrm{e}^{kx} v(x) = \mathrm{e}^{kx} \dfrac{1}{F(D+k)} v(x)$.

Последняя формула носит название формулы смещения.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$5y'' + 7y' - 12y = \mathrm{e}^{3x}.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в операторном виде

$$(5D^2 + 7D - 12)y = \mathrm{e}^{3x}.$$

Находим общее решение однородного уравнения:

$$5D^2 + 7D - 12 = 0, \quad D_1 = 1,\ D_2 = -\frac{12}{5}, \quad y_0(x) = C_1\, \mathrm{e}^{-x} + C_2\, \mathrm{e}^{-\frac{12}{5}x}.$$

При отыскании частного решения воспользуемся формулой 7):

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{5D^2+7D-12}\,\mathrm{e}^{3x} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{5\cdot 3^2+7\cdot 3-12} = \frac{1}{54}\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Ответ: $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{12}{5}x} + \dfrac{1}{54}\,\mathrm{e}^{3x}$.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$y''' - y = \sin x.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в операторном виде

$$(D^3-1)y = \sin x.$$

Находим общее решение однородного уравнения:

$$D^3-1=0,\quad (D-1)(D^2+D+1)=0,\quad D_1=1,\ D_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y_0(x) = C_1\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ищем частное решение неоднородного уравнения.

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{D^3-1}\sin x.$$

Так как обратный оператор содержит нечетные степени, то воспользоваться одной из формул 8) нельзя. Поэтому “дополняем” знаменатель обратного оператора до разности квадратов, а затем воспользуемся свойством 5) и первой формулой 8).

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{D^3-1}\sin x = \frac{D^3+1}{D^6-1}\sin x = (D^3+1)\frac{1}{D^6-1}\sin x =$$
$$= -\frac{1}{2}(D^3+1)\sin x = -\frac{1}{2}(-\cos x + \sin x).$$

Ответ: $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}\cos 3x.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в операторном виде

$$(D^2-4D+4)y = \mathrm{e}^{2x}\cos 3x.$$

Находим общее решение однородного уравнения:

$$D^2-4D+4=0,\quad (D-2)^2=0,\quad D_{1,2}=2,\quad y_0(x) = (C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

При отыскании частного решения неоднородного уравнения воспользуемся формулой смещения

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{(D-2)^2}\,\mathrm{e}^{2x}\cos 3x = \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D^2}\cos 3x = \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D}\frac{\sin 3x}{3} = -\,\mathrm{e}^{2x}\frac{\cos 3x}{9}.$$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{2x}\cos 3x$.

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$y'' + 4y = \sin 2x.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в операторном виде

$$(D^2 + 4)y = \sin 2x.$$

Находим общее решение однородного уравнения:

$$D^2 + 4 = 0, \quad D_{1,2} = \pm 2i, \quad y_0(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Ищем частное решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{D^2 + 4}\sin 2x.$$

Формула 8) неприменима, так как $F(-a^2) = -2^2 + 4 = 0$. Воспользуемся формулой Эйлера: $\mathrm{e}^{i2x} = \cos 2x + i\sin 2x$. Тогда

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{D^2+4}\sin 2x = \operatorname{Im}\frac{1}{D^2+4}\,\mathrm{e}^{i2x} = \operatorname{Im}\,\mathrm{e}^{i2x}\frac{1}{(D+2i)^2+4}\,1 =$$
$$= \operatorname{Im}\,\mathrm{e}^{i2x}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D+4i}\,1 = \operatorname{Im}\,(\cos 2x + i\sin 2x)\frac{x}{4i} = -\frac{x}{4}\cos 2x.$$

Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{x}{4}\cos 2x$.

П р и м е р 5. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + y = x^2 - x + 2.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в операторном виде

$$(D^2 - 4D + 1)y = x^2 - x + 2.$$

Находим общее решение однородного уравнения:

$$D^2 - 4D + 1 = 0, \quad D_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}, \quad y_0(x) = \mathrm{e}^{2x}(C_1\operatorname{ch}\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sh}\sqrt{3}x).$$

Ищем частное решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{D^2 - 4D + 1}(x^2 - x + 2).$$

Для того, чтобы подействовать обратным оператором на многочлен, нужно поделить числитель (в данном случае 1) на знаменатель, записанный по возрастающем степеням (в данном случае на $1-4D+D^2$). Деление производится до тех пор, пока не получим слагаемое со степенью D, равной степени многочлена. Итак, имеем

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 1 & 1-4D+D^2 \\ \cline{3-3}
 & \underline{1-4D+D^2} & 1+4D+15D^2 \\
 & \quad -\,4D-D^2 & \\
 & \quad \underline{4D-16D^2+4D^3} & \\
 & \qquad 15D^2-4D^3 &
\end{array}
$$

Используя результат от деления, получаем

$$
\begin{aligned}
y_{\text{ч}} = \frac{1}{D^2-4D+1}(x^2-x+2) &= (1+4D+15D^2)(x^2-x+2) = \\
&= x^2-x+2+8x-4+15\cdot 2 = x^2+7x+28.
\end{aligned}
$$

Ответ: $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1 \operatorname{ch}\sqrt{3}x + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{3}x) + x^2+7x+28$.

Задачи для практических занятий

7.1. $y''-2y'-3y = \mathrm{e}^{4x}$.

7.2. $y''-y = 2\,\mathrm{e}^{x} - x^2$.

7.3. $y''+y'-2y = 3x\,\mathrm{e}^{x}$.

7.4. $y''-3y'+2y = \sin x$.

7.5. $y''+y = \cos 4x$.

7.6. $y''+y = 4\cos x$.

7.7. $y''-5y'+4y = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

7.8. $y''-9y = \mathrm{e}^{3x}\cos x$.

7.9. $y''+y = x\sin x$.

7.10. $y''-3y'+2y = 2^x$.

Домашнее задание

7.11. $y''+y = 4x\,\mathrm{e}^{x}$.

7.12. $y''+3y'-4y = \mathrm{e}^{-4x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$.

7.13. $y''+2y'-3y = x^2\,\mathrm{e}^{x}$.

7.14. $y''-4y'+8y = \mathrm{e}^{2x} + \sin 2x$.

7.15. $y''-2y'+y = 6x\,\mathrm{e}^{x}$.

7.16. $y''+4y'+4y = x\,\mathrm{e}^{2x}$.

7.17. $y''-5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

7.18. $y''+2y = x2^x$.

Ответы:

7.1. $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{4x}$. **7.2.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{x} + x^2 + 2$. **7.3.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + + \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}\right)$. **7.4.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$. **7.5.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{1}{15}\cos 4x$. **7.6.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x\sin x$. **7.7.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + (-2x^2 + 2x - 3)\,\mathrm{e}^{2x}$. **7.8.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{37}(6\sin x - \cos x)\,\mathrm{e}^{3x}$. **7.9** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{x}{4}\sin x - \dfrac{x^2}{4}\cos x$. **7.10.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{2^x}{\ln^2 2 - 3\ln 2 + 2}$. **7.11.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2(x-1)\,\mathrm{e}^{x}$. **7.12.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-4x} - \dfrac{x}{5}\,\mathrm{e}^{-4x} - \left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{36}\right)\,\mathrm{e}^{-x}$. **7.13.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x} + \left(\dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x}{32}\right)\,\mathrm{e}^{x}$. **7.14.** $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{20}(2\cos 2x + \sin 2x)$. **7.15.** $y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{x} + x^3\,\mathrm{e}^{x}$. **7.16.** $y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-2x} + \left(\dfrac{x}{16} - \dfrac{1}{32}\right)\,\mathrm{e}^{2x}$. **7.17.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{3}{25}x^2 - \dfrac{6}{125}x + \dfrac{1}{50}(\cos 5x - \sin 5x)$. **7.18.** $y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + 2^x\left(\dfrac{x}{2 + \ln^2 2} - \dfrac{2\ln 2}{(2 + \ln^2 2)^2}\right)$.

Занятие 8. Операторный метод решения линейных уравнений степени выше второй

Задачи для практических занятий

8.1. $y''' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

8.2. $y''' - 3y'' + 3y' - y = \mathrm{e}^{x}$.

8.3. $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1$.

8.4. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x$.

8.5. $y^{(IV)} + 2y'' + y = \cos x$.

8.6. $y^{(IV)} + 5y'' + 4y = 2\sin x\cos 4x$.

8.7. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.

8.8. $y''' - y'' - y' + y = 3\,\mathrm{e}^{x} + 5x\cos x$.

Домашнее задание

8.9. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

8.10. $y^{(V)} + y''' = x^3$.

8.11. $y^{(IV)} + 18y'' + 81y = \sin 2x\sin 4x$.

8.12. $y^{(IV)} + 5y'' + 4y = 3\sin x$.

8.13. $y^{(IV)} - y = x\,\mathrm{e}^x + \cos x$.

8.14. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \mathrm{e}^{2x}\sin 2x$.

8.15. $y^{(IV)} + y'' = 7x - 3\cos x$.

8.16. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + x\,\mathrm{e}^{2x}$.

Ответы:

8.1. $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{-2x} + (x^2 + x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$. **8.2.** $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\,\mathrm{e}^x + \dfrac{x^3}{6}\,\mathrm{e}^x$. **8.3.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos x + C_5\sin x + \dfrac{x^5}{60} - \dfrac{x^3}{2}$. **8.4.** $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x + \dfrac{1}{9}\cos x$. **8.5.** $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - \dfrac{x^2}{8}\cos x$. **8.6.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + \dfrac{1}{504}\sin 5x - \dfrac{1}{40}\sin 3x$. **8.7.** $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \dfrac{x}{4}\sin x - \dfrac{x^2}{4}\cos x$. **8.8.** $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3}{4}x^2\,\mathrm{e}^x + \dfrac{5}{4}[(x-1)\cos x - (x+2)\sin x]$. **8.9.** $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{2x} - x - 4$. **8.10.** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos x + C_5\sin x + \dfrac{x^6}{120} - \dfrac{x^4}{4}$. **8.11** $y = (C_1 + C_2x)\cos 3x + (C_3 + C_4x)\sin 3x + \dfrac{\cos 2x}{50} - \dfrac{\cos 6x}{1458}$. **8.12.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - \dfrac{x}{2}\cos x$. **8.13.** $y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \dfrac{1}{8}(x^2 - 3x)\,\mathrm{e}^x - \dfrac{x}{4}\sin x$. **8.14.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + \dfrac{1}{40}\,\mathrm{e}^{2x}(\sin 2x - 2\cos 2x)$. **8.15.** $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + \dfrac{7}{6}x^3 + \dfrac{3x}{2}\sin x$. **8.16.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{27}(3x^3 + 12x^2 + 26x) + \dfrac{1}{4}(1 - 2x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Занятие 9. Метод разложения оператора на дроби

Этот метод применяется к нахождению частного решения уравнения

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

с постоянными коэффициентами, когда $f(x)$ — произвольная функция и формулы, приведенные ранее, не применимы. Частное решение ищем по формуле

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{F(D)}f(x).$$

Разложим операторный многочлен $F(D)$ на множители

$$F(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n = a_0\prod_{k=1}^{n}(D - \lambda_k),$$

где $D_k = \lambda_k$ — корни уравнения

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n = 0$$

— действительные или комплексные. Используя метод неопределенных коэффициентов разложим обратный оператор на простые дроби

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{a_0(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{D-\lambda_k}.$$

Тогда

$$y_ч = \frac{1}{F(D)} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{D-\lambda_k} f(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{D-\lambda_k} \mathrm{e}^{\lambda_k x} f(x) \, \mathrm{e}^{-\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{n} A_k \, \mathrm{e}^{\lambda_k x} \frac{1}{D} f(x) \, \mathrm{e}^{-\lambda_k x}.$$

Таким образом, нахождение частного решения сводится к вычислению интегралов

$$\frac{1}{D} f(x) \, \mathrm{e}^{-\lambda_k x} = \int f(x) \, \mathrm{e}^{-\lambda_k x} \, dx.$$

П р и м е р ы

1) Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в операторном виде

$$(D^2 - 3D + 2)y = \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Находим общее решение однородного уравнения:

$$D^2 - 3D + 2 = 0, \quad D_1 = 1, \; D_2 = 2, \quad y_o(x) = C_1 \, \mathrm{e}^{x} + C_2 \, \mathrm{e}^{2x}.$$

Ищем частное решение неоднородного уравнения:

$$y_ч = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{1}{(D-1)(D-2)} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} =$$
$$= \left(\frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1} \right) \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} =$$
$$= \frac{1}{D-2} \mathrm{e}^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} - \frac{1}{D-1} \mathrm{e}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \mathrm{e}^{2x} \frac{1}{D} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} - \mathrm{e}^{x} \frac{1}{D} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Вычисляем интегралы

$$\frac{1}{D}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\int\frac{dx}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)}=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)dx=-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}-\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)}\,dx=$$

$$-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)}=-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)d\,\mathrm{e}^{2x}=$$

$$=-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}-\frac{1}{2}\ln\,\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)=-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}-x+\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1).$$

$$\frac{1}{D}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\int\frac{dx}{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x}+1)}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)d\,\mathrm{e}^{x}=-\frac{1}{e^{x}}-\operatorname{arctg}\,\mathrm{e}^{x}.$$

Итак,

$$y_{\text{ч}}=\mathrm{e}^{2x}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}-x+\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)\right)+\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}+\operatorname{arctg}\,\mathrm{e}^{x}\right)=$$

$$=-x\,\mathrm{e}^{2x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)+\mathrm{e}^{x}\operatorname{arctg}\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем решение исходного уравнения

$$y=C_1\,\mathrm{e}^{x}+C_2\,\mathrm{e}^{2x}-x\,\mathrm{e}^{2x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)+\mathrm{e}^{x}\operatorname{arctg}\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}.$$

2) Решить уравнение

$$y''+y=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Р е ш е н и е. Ищем частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч}}=\frac{1}{D^2+1}\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{(D-i)(D+i)}\frac{1}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{D-i}-\frac{1}{D+i}\right)\frac{1}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{D-i}\,\mathrm{e}^{ix}\frac{\mathrm{e}^{-ix}}{\sin^2 x}-\frac{1}{D+i}\,\mathrm{e}^{-ix}\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{e}^{ix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix}\frac{1}{D}\frac{\mathrm{e}^{-ix}}{\sin^2 x}-\mathrm{e}^{-ix}\frac{1}{D}\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{e}^{ix}\right).$$

Вычисляем интегралы

$$\frac{1}{D}\frac{e^{-ix}}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos x - i\sin x}{\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx - i\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{\sin x} - i\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

$$\frac{1}{D}\frac{e^{ix}}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos x + i\sin x}{\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx + i\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{\sin x} + i\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Таким образом,

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{2i}\left[(\cos x + i\sin x)\left(-\frac{1}{\sin x} - i\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) -\right.$$

$$\left. = -(\cos x - i\sin x)\left(-\frac{1}{\sin x} + i\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)\right] = -1 - \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Учитывая, что решение общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

окончательно получаем

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - 1 - \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

З а м е ч а н и е. В этом примере существует другой путь нахождения частного решения.

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{D^2+1}\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}\frac{1}{D}\frac{e^{-ix}}{\sin^2 x} - e^{-ix}\frac{1}{D}\frac{1}{\sin^2 x}e^{ix}\right) =$$

$$== \frac{1}{2i}\left(e^{ix}\int \frac{e^{-i\xi}}{\sin^2\xi}\,d\xi - e^{-ix}\int \frac{e^{i\xi}}{\sin^2\xi}\,d\xi\right) =$$

$$\int \frac{e^{i(x-\xi)} - e^{-i(x-\xi)}}{2i}\frac{1}{\sin^2\xi}\,d\xi =$$

$$= \int \frac{\sin(x-\xi)}{\sin^2\xi}\,d\xi = \sin x\int \frac{\cos\xi}{\sin^2\xi}\,d\xi - \cos x\int \frac{\sin\xi}{\sin^2\xi}\,d\xi =$$

$$= \sin x\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx - \cos x\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = 1 - \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Задачи для практических занятий

9.1. $y'' + 4y' + 3y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

9.2. $y'' - a^2 y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

9.3. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = \dfrac{1}{e^x+1}$.

9.4. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

9.5. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

9.6. $y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}\,\mathrm{e}^x$.

Домашнее задание

9.7. $y'' - y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}$.

9.8. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

9.9. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.

9.10. $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}}$.

9.11. $y'' + \omega^2 y = f(x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

9.12. $y''' + 3y'' + 2y' = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

Ответы:

9.1. $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3} + (\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-x})\ln(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^{-2x}\right)$. **9.2.** $y = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x f(\xi)\operatorname{sh} a(x-\xi)\,d\xi$. **9.3.** $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + C_3\,\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-3x})\ln(\mathrm{e}^x + 1)$. **9.4.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|$. **9.5.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$. **9.6.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. **9.7.** $y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2} + \operatorname{sh} x\ln(\mathrm{e}^x + 1)$. **9.8.** $y = \mathbb{C}_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\ln|\sin x| - x\cos x$. **9.9.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x$. **9.10.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\left(\mathrm{e}^x\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}} + \arcsin\mathrm{e}^x\right) + \dfrac{1}{3}\sqrt{(1 - \mathrm{e}^{2x})^3}$. **9.11.** $y = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int\limits_0^x f(\xi)\sin\omega(x-\xi)\,d\xi$. **9.12.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{x}{2} - \mathrm{e}^{-x}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{-2x} - 1)\ln(\mathrm{e}^{2x} + 1)$.

Занятие 10. Уравнение Эйлера. Метод вариаций произвольных постоянных

Уравнение Эйлера

Уравнение Эйлера

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$$

при $x > 0$ заменой $x = \mathrm{e}^t$ приводится к уравнению в операторном виде

$$F(D)\,y(t) = f(\mathrm{e}^t), \quad D = \frac{d}{dt},$$

где операторный многочлен $F(D)$ находится по следующему правилу: Каждое слагаемое $x^k y^{(k)}(x)$ заменяется по формуле

$$x^k y^{(k)}(x) = \underbrace{D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)}_{k-\text{сомножителей}}\,y(t).$$

З а м е ч а н и е. При $x < 0$ полагают $x = -\mathrm{e}^t$, что при водит к общему решению того же вида. Поэтому достаточно найти общее решение при $x > 0$ и получить из него решение исходного уравнения в предположении, что переменная x может принимать значения любого знака.

П р и м е р ы

1) Решить уравнение однородное уравнение Эйлера

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

После замены $x = \mathrm{e}^t$ запишем уравнение в операторном виде

$$D(D-1)(D-2)y(t) - 3D(D-1)y(t) + 6Dy(t) - 6y(t) = 0,$$
$$(D-1)(D^2-5D+6)y(t) = 0.$$

Решая характеристическое уравнение

$$(D-1)(D^2-5D+6) = 0,$$

получаем $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $D_3 = 3$,

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{3t}$$

или в старых переменных

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3.$$

2) Решить неоднородное уравнение Эйлера

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = -4x.$$

Р е ш е н и е. Замена $x = \mathrm{e}^t$ приводит к уравнению

$$(D^2 - 5D + 4)y(t) = -4\,\mathrm{e}^t.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_o(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{4t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем операторным методом

$$y_ч = \frac{1}{D^2-5D+4}(-4\,\mathrm{e}^t) = \frac{1}{(D-1)(D-4)}(-4\,\mathrm{e}^t) =$$
$$= -4\,\mathrm{e}^t \frac{1}{D}\frac{1}{D-3}\,1 = -\frac{4}{3}t\,\mathrm{e}^t.$$

Окончательно получаем

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{4t} - \frac{4}{3}t\,\mathrm{e}^t$$

или в старых переменных (см. замечание)

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^4 - \frac{4}{3}x\ln|x|.$$

Метод вариаций

Если известно общее решение

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,$$

то решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

ищется в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x),$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x, подлежащие определению. Эти функции определяются из следующей системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \dotfill \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Решая ее, находим производные от искомых функций

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x), \ldots, C_n'(x) = \varphi_n(x),$$

откуда

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + C_2, \ldots$$
$$C_n(x) = \int \varphi_n(x)\,dx + C_n.$$

Подставляя найденные значения $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ в формулу

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x),$$

получаем

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) +$$
$$+ y_1(x)\int \varphi_1(x)\,dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)\,dx + \cdots + y_n(x)\int \varphi_n(x)\,dx.$$

П р и м е р ы

1) Решить уравнение

$$y'' - y = \frac{1}{\operatorname{sh}^3 x}.$$

Р е ш е н и е. Поскольку правая часть уравнения представлена через гиперболические функции, то решение однородного уравнения также выразим через гиперболические функции:

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = C_1(x) \operatorname{ch} x + C_2(x) \operatorname{sh} x.$$

Составляем систему для нахождения производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x) \operatorname{ch} x + C_2'(x) \operatorname{sh} x = 0, \\ C_1'(x) \operatorname{sh} x + C_2'(x) \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^3 x}. \end{cases}$$

Решаем ее по правилу Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sh} x \\ \dfrac{1}{\operatorname{sh}^3 x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \operatorname{ch} x & 0 \\ \operatorname{sh} x & \dfrac{1}{\operatorname{sh}^3 x} \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x}.$$

Откуда после интегрирования имеем

$$C_1(x) = \operatorname{cth} x + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x} + C_2.$$

Подставляя найденные функции в

$$y = C_1(x)\operatorname{ch} x + C_2(x)\operatorname{sh} x,$$

получаем ответ

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{2\operatorname{sh} x}.$$

2) Решить уравнение

$$y''' + y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Р е ш е н и е. Для однородного уравнения имеем $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. Поэтому общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x.$$

Составляем систему для нахождения производных $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ и $C_3'(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0, \\ \qquad -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0, \\ \qquad -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}. \end{cases}$$

Решаем ее

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x},$$

$$C_3'(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + C_1,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}\,dx = x + \operatorname{ctg} x + C_2,$$

$$C_3(x) = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int \frac{d\sin x}{\sin x} = -\ln|\sin x| + C_3.$$

Тогда

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \frac{1}{\sin x} + \cos x(x + \operatorname{ctg} x) - \sin x\ln|\sin x|.$$

Задачи для практических занятий

10.1. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.

10.2. $x^3y''' + xy' - y = 0$.

10.3. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.

10.4. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

10.5. $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\cos \mathrm{e}^x$.

10.6. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos x}$.

10.7. $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

10.8. $y''' - y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Домашнее задание

10.9. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.

10.10. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

10.11. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.

10.12. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x + 1}$.

10.13. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

10.14. $y'' - y = \operatorname{cth} x$.

10.15. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

10.16. $y''' - 3y'' + 2y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Ответы:

10.1. $y = C_1x^2 + C_2x^3$. **10.2.** $y = (C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)x$. **10.3.** $y = C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|) + 2x$. **10.4.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \dfrac{1}{2}x\sin 2x$. **10.5.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x - \cos\,\mathrm{e}^x$. **10.6.** $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \mathrm{e}^{2x}(\cos x\ln|\cos x| + x\sin x)$. **10.7.** $y = C_1\,\mathrm{ch}\,x + C_2\,\mathrm{sh}\,x - \mathrm{ch}\,x\ln(\mathrm{ch}\,x) + x\,\mathrm{sh}\,x$. **10.8.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x - (1 + \mathrm{ch}\,x)\ln(\mathrm{e}^x + 1)$. **10.9.** $y = C_1x^3 + C_2x^{-1}$. **10.10.** $y = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x| + 3)$. **10.11.** $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + \dfrac{1}{10}(\cos\ln x - 3\sin\ln x)$. **10.12.** $y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x})\ln(\mathrm{e}^x + 1)$. **10.13.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\left|\mathrm{tg}\,\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$. **10.14.** $y = C_1\,\mathrm{ch}\,x + C_2\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}\,x\ln\left|\mathrm{th}\,\dfrac{x}{2}\right|$. **10.15.** $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \dfrac{1}{\cos x} + \cos\ln|\cos x| + (x - \mathrm{tg}\,x)|\sin x$. **10.16.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{x}{2}(\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x) + \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x + 1)\ln(\mathrm{e}^x + 1)$.

Занятие 11. Операторный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему уравнений, приведенную к нормальному виду

$$\begin{cases}\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t),\\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t),\end{cases}$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — неизвестные функции, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — заданные функции.

Перенесем выражения с неизвестным функциями в левую часть

$$\begin{cases}\dot{x} - a_{11}x - a_{12}y = f_1(t),\\ \dot{y} - a_{21}x - a_{22}y = f_2(t),\end{cases}$$

а затем запишем систему в операторном виде

$$\begin{cases}(D - a_{11})x - a_{12}y = f_1(t),\\ -a_{21}x + (D - a_{22})y = f_2(t),\end{cases}$$

где оператор $D = \dfrac{d}{dt}$. Рассматривая эту систему как алгебраическую относительно x и y, применим к ней правило Крамера. Тогда определители этой системы равны

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D - a_{11} & a_{12} \\ -a_{11} & D - a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_1(t) & a_{12} \\ f_2(t) & D - a_{22} \end{vmatrix} = \tilde{f}_1(t), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} D - a_{11} & f_1(t) \\ -a_{11} & f_2(t) \end{vmatrix} = \tilde{f}_2(t),$$

и система принимает вид

$$\begin{cases} \Delta(D)x = \Delta_1, \\ \Delta(D)y = \Delta_2, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \Delta(D)x = \tilde{f}_1(t), \\ \Delta(D)y = \tilde{f}_2(t). \end{cases}$$

Решая, например, первое уравнение $\Delta(D)x = \tilde{f}_1(t)$ находим вначале $x = x(t, C_1, C_2)$, а затем $y = y(t, C_1, C_2)$, выражая y через x из первого уравнения первоначальной системы. Можно вначале найти y из уравнения $\Delta(D)y = \tilde{f}_2(t)$, а затем x из второго уравнения первоначальной системы.

П р и м е р ы

1) Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем систему в операторном виде

$$\begin{cases} \dot{x} + x + 2y = 0, \\ -3x + \dot{y} - 4y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (D+1)x + 2y = 0, \\ -3x + (D-4)y = 0. \end{cases}$$

Вычислим определитель этой системы

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D+1 & 2 \\ -3 & D-4 \end{vmatrix} = D^2 - 3D + 2.$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} (D^2 - 3D + 2)x = 0, \\ (D^2 - 3D + 2)y = 0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение

$$D^2 - 3D + 2 = 0, \quad D_1 = 1, \ D_2 = 2, \quad x = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Из первого уравнения исходной системы находим y

$$2y = -\dot{x} - x = -2C_1\,\mathrm{e}^t - 3C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \quad y = -C_1\,\mathrm{e}^t - \frac{3C_2}{2}\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Таким образом

$$\begin{cases} x = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y = -C_1\,\mathrm{e}^t - \dfrac{3C_2}{2}\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

Заменяя произвольную постоянную C_2 на $2C_2$ мы можем избавится в ответе от дробных коэффициентов

$$\begin{cases} x = C_1\,\mathrm{e}^t + 2C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y = -C_1\,\mathrm{e}^t - 3C_2\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

2) Решить неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - \dfrac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t}, \\ \dot{y} = -x + \mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В операторном виде система имеет вид

$$\begin{cases} (D-2)x - y = -\dfrac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t}, \\ x + Dy = \mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

Вычисляем определители этой системы

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D-2 & -1 \\ 1 & D \end{vmatrix} = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\dfrac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t} & -1 \\ \mathrm{e}^{2t} & D \end{vmatrix} = \left(-\dfrac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t}\right)' + \mathrm{e}^{2t} =$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t} - \frac{2\,\mathrm{e}^t}{\cos^3 t}\sin t + \mathrm{e}^{2t},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D-2 & -\dfrac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t} \\ 1 & \mathrm{e}^{2t} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t}.$$

Поскольку выражение для определителя Δ_2 проще, то решаем уравнение для нахождения y

$$(D-1)^2 y = \frac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t}.$$

Общее решение однородного уравнения равно $y_0 = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t$. Ищем частное решение неоднородного уравнения

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{(D-1)^2}\frac{\mathrm{e}^t}{\cos^2 t} = \mathrm{e}^t \frac{1}{D^2}\frac{1}{\cos^2 t} = \mathrm{e}^t \frac{1}{D}\operatorname{tg} t = -\mathrm{e}^t \ln|\cos t|.$$

Таким образом,

$$y = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \ln|\cos t|.$$

Функцию $x(t)$ находим из второго уравнения первоначальной системы

$$x = \mathrm{e}^{2t} - \dot{y} = \mathrm{e}^{2t} + (C_1 + C_2 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \ln|\cos t| + \mathrm{e}^t \operatorname{tg} t.$$

Окончательно получаем

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t(\ln|\cos t| - \operatorname{tg} t) \\ y = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \ln|\cos t|. \end{cases}$$

Задачи для практических занятий

11.1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

11.2. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

11.3. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

11.4. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$

11.5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2\,\mathrm{e}^t. \end{cases}$

11.6. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

11.7. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

11.8. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

Домашнее задание

11.9. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

11.10. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

11.11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

11.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

11.13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4\,\mathrm{e}^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

11.14. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2\,\mathrm{e}^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

11.15. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

11.16. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{\mathrm{e}^t - 1}. \end{cases}$

Ответы:

11.1. $x = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{5t}$, $y = -C_1\,\mathrm{e}^t + 3C_2\,\mathrm{e}^{5t}$. **11.2.** $x = 2C_1\,\mathrm{e}^{3t} - 4C_2\,\mathrm{e}^{-3t}$, $y = C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{-3t}$. **11.3.** $x = \mathrm{e}^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)$, $y = \mathrm{e}^t(-C_2\cos 3t + C_1\sin 3t)$. **11.4.** $x = (C_1 + 3C_2t)\,\mathrm{e}^{2t}$, $y = (C_2 - C_1 - 3C_2t)\,\mathrm{e}^{2t}$. **11.5.** $x = (C_1 + C_2t)\,\mathrm{e}^t - t^2\,\mathrm{e}^t$, $y = (C_1 - C_2 + C_2t)\,\mathrm{e}^t + (2t - t^2)\,\mathrm{e}^t$. **11.6.** $x = C_2\cos t - C_1\sin t + \operatorname{tg} t$, $y = C_1\cos t + C_2\sin t + 2$. **11.7.** $x = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} - \cos t - 2\sin t$, $y = -C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} + 3\cos t + \sin t$. **11.8.** $x = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|$, $y = 2C_1\cos t + 2C_2\sin t + 2t\sin t + 2\cos t\ln|\cos t|$. **11.9.** $x = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t}$, $y = 2C_1\,\mathrm{e}^{-t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{3t}$. **11.10.** $x = \mathrm{e}^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, $y = \mathrm{e}^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$. **11.11.** $x = (C_1 + C_2t)\,\mathrm{e}^t$, $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)\,\mathrm{e}^t$. **11.12.** $x = (C_1 + 2C_2t)\,\mathrm{e}^{-t}$, $y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)\,\mathrm{e}^{-t}$. **11.13.** $x = -C_1\,\mathrm{e}^t + 2C_2\,\mathrm{e}^{4t} + 3\,\mathrm{e}^{5t}$, $y = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{4t} + \mathrm{e}^{5t}$. **11.14.** $x = (C_1 + 1)\,\mathrm{e}^t - C_2\,\mathrm{e}^{-t} - t^2 - 2 + t\,\mathrm{e}^t$, $y = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-t} - 2t + t\,\mathrm{e}^t$. **11.15.** $x = -C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} - \cos t + 3\sin t$, $y = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + 2\cos t - \sin t$. **11.16.** $x = C_1 + 2C_2\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-t}\ln|\,\mathrm{e}^t - 1|$, $y = -2C_1 - 3C_2\,\mathrm{e}^{-t} - 3\,\mathrm{e}^{-t}\ln|\,\mathrm{e}^t - 1|$.

Занятие 12. Системы, не приведенные к нормальному виду

Ограничимся решением однородных систем. Идеи, изложенные здесь, применимы и для неоднородных систем. Точно так же, как и в предыдущем занятии, решение систем, не приведенных к нормальному виду, сводится к системе в операторном виде

$$\begin{cases}\Delta(D)x = 0,\\ \Delta(D)y = 0,\end{cases}$$

Решая эти уравнения, записываем решения x и y с неопределенными коэффициентами. Подставляя эти решения в одно из уравнений исходной системы (а при необходимости и в оба уравнения), получаем уравнения связывающие эти неопределенные коэффициенты. Выбирая некоторые из них за произвольные постоянные, выражаем через них другие коэффициенты. Произвольных постоянных должно быть столько, каков порядок системы, определяемый наибольшей степенью операторного многочлена $\Delta(D)$.

П р и м е р ы

1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2\dot{x} - 5\dot{y} = 4y - x,\\ 3\dot{x} - 4\dot{y} = 2x - y.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем систему в операторном виде

$$\begin{cases}(2D+1)x - (5D+4)y = 0,\\ (3D-2)x - (4D-1)y = 0.\end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Имеем

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} 2D+1 & -(5D+4)\\ 3D-2 & -(4D-1)\end{vmatrix} = 7D^2 - 7 = 0.$$

Тогда $D_{1,2} = \pm 1$ и

$$\begin{cases}x = A_1\,\mathrm{e}^t + A_2\,\mathrm{e}^{-t},\\ y = A_3\,\mathrm{e}^t + A_4\,\mathrm{e}^{-t}.\end{cases}$$

Подставляя эти значения x и y в первое уравнение исходной системы и приравнивая коэффициенты перед e^t и e^{-t}, получаем систему уравнений для неизвестных коэффициентов A_i

$$\begin{cases}A_1 = 3A_3,\\ A_2 = A_4.\end{cases}$$

Вводим произвольные постоянные C_1 и C_2

$$\begin{cases}A_3 = C_1,\\ A_4 = C_2,\end{cases} \qquad \text{тогда} \qquad \begin{cases}A_1 = 3C_1,\\ A_2 = C_2.\end{cases}$$

Окончательно получаем ответ для системы

$$\begin{cases} x = 3C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0, \\ \ddot{x} + 4\dot{x} - x + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем систему в операторном виде

$$\begin{cases} (2D^2 + 2D + 1)x + (3D^2 + D + 1)y = 0, \\ (D^2 + 4D - 1)x + (3D^2 + 2D - 1)y = 0. \end{cases}$$

Вычислим определитель этой системы

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} 2D^2 + 2D + 1 & 3D^2 + D + 1 \\ D^2 + 4D - 1 & 3D^2 + 2D - 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2D^2 + 2D + 1)(3D^2 + 2D - 1) - (D^2 + 4D - 1)(3D^2 + D + 1) =$$
$$= 3D^4 - 3D^3 + 3D^2 - 3D.$$

Разложив последнее выражение на множители, получим

$$D(D-1)(D^2+1) = 0, \quad D_1 = 0,\ D_2 = 1,\ D_{3,4} = \pm i,$$
$$\begin{cases} x = A_1 + A_2\,\mathrm{e}^t + A_3 \cos t + A_4 \sin t, \\ y = A_5 + A_6\,\mathrm{e}^t + A_7 \cos t + A_8 \sin t. \end{cases}$$

Подставим найденные выражения для x и y во второе уравнение решаемой системы

$$\begin{aligned} A_2\,\mathrm{e}^t - A_3 \cos t - A_4 \sin t &+ \\ + 4A_2\,\mathrm{e}^t + 4A_4 \cos t - 4A_3 \sin t &- \\ -A_1 - A_2\,\mathrm{e}^t - A_3 \cos t - A_4 \sin t &+ \\ + 3A_6\,\mathrm{e}^t - 3A_7 \cos t - 3A_8 \sin t &+ \\ + 2A_6\,\mathrm{e}^t + 2A_8 \cos t - 2A_7 \sin t &- \\ -A_5 - A_6\,\mathrm{e}^t - A_7 \cos t - A_8 \sin t &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при линейно независимых функциях 1, e^t, $\cos t$ и $\sin t$, получаем соотношения, связывающие неопределенные коэффициенты

$$\begin{cases} A_1 + A_5 = 0, \\ A_2 + A_6 = 0, \\ -A_3 + 2A_4 - 2A_7 + A_8 = 0, \\ 2A_3 + A_4 + A_7 + 2A_8 = 0. \end{cases}$$

Введем произвольные постоянные. Положим $A_1 = C_1$, $A_2 = C_2$. Тогда $A_5 = -C_1$, $A_6 = -C_2$. Решая затем третье и четвертое уравнения последней системы относительно A_7 и A_8, имеем

$$\begin{cases} A_7 = -\dfrac{4}{5}A_3 + \dfrac{3}{5}A_4, \\ A_8 = -\dfrac{3}{5}A_3 - \dfrac{4}{5}A_4. \end{cases}$$

Полагая $A_3 = 5C_3$, $A_4 = 5C_4$, получаем $A_7 = -4C_3 + 3C_4$, $A_8 = -3C_3 - 4C_4$. Подставляем найденные значения коэффициентов A_i через произвольные постоянные в выражения, полученные выше для x и y, получим ответ:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^t + 5C_3\cos t + 5C_4\sin t, \\ y = -C_1 - C_2\,\mathrm{e}^t + (3C_4 - 4C_3)\cos t - (3C_3 + 4C_4)\sin t. \end{cases}$$

Задачи для практических занятий

12.1. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} \ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0. \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + 2x = 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$

12.4. $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} + 2\ddot{y} + \dot{y} + x = 0, \\ \ddot{x} - 2\dot{x} + 2\ddot{y} - \dot{y} + 2x = 0. \end{cases}$

12.5. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases}$

12.6. $\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$

Домашнее задание

12.7. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y, \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$

12.8. $\begin{cases} \ddot{x} + 3\ddot{y} - x = 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0. \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0, \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0. \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0, \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$

Ответы:

12.1. $x = C_1\,e^t + C_2\,e^{-t} + 2C_3\,e^{-2t}$, $y = 2C_1\,e^t + C_3\,e^{-2t}$. **12.2.** $x = C_1\,e^t - 2C_3\,e^{3t}$, $y = C_2\,e^{-t} + C_3\,e^{3t}$. **12.3.** $x = 2C_1\,e^{2t} + 2C_2\,e^{-2t} + 2C_3\cos 2t + 2C_4\sin 2t$, $y = 3C_1\,e^{2t} - 3C_2\,e^{-2t} + C_4\cos 2t - C_3\sin 2t$. **12.4.** $x = 3C_2\,e^{3t}$, $y = C_1 - C_2\,e^{3t}$. **12.5.** $x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-t}(C_3\cos t + C_4\sin t)$, $y = e^t(C_2\cos t - C_1\sin t) + e^{-t}(-C_4\cos t + C_3\sin t)$. **12.6.** $x = (C_1 + C_2 t)\,e^t + C_3\,e^{-t}$, $y = (-2C_1 - C_2 - 2C_2 t)\,e^t - 4C_3\,e^{-t}$.**12.7.** $x = 3C_1\,e^t + 3C_2\,e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$, $y = C_1\,e^t + C_2\,e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$. **12.8.** $x = C_1\,e^{\frac{t}{2}} - 4C_2\,e^{-2t}$, $y = C_1\,e^{\frac{t}{2}} + C_2\,e^{-2t}$. **12.9.** $x = C_1\,e^t + C_2\,e^{-t} + C_3\,e^{2t} + C_4\,e^{-2t}$, $y = C_1\,e^t + 5C_2\,e^{-t} + 2C_3\,e^{2t} + 2C_4\,e^{-2t}$. **12.10.** $x = 3C\,e^{-t}$, $y = C\,e^{-t}$.

Занятие 13. Метод Эйлера решения линейных систем

Методом Эйлера решаются системы линейных уравнений, приведенные к нормальному виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x^n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x^n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x^n. \end{cases}$$

Запишем эту систему в векторном (матричном) виде

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неизвестный вектор, а

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— заданная матрица системы. Решение системы ищем в виде $\vec{x} = \vec{\gamma}\,e^{\lambda t}$, где λ — число и $\vec{\gamma}$ — постоянный вектор, подлежащие определению. Подставляем предполагаемое решение в векторное уравнение

$$\lambda\vec{\gamma}\,e^{\lambda t} = A\vec{\gamma}\,e^{\lambda t}.$$

После сокращения на $e^{\lambda t}$ получаем задачу

$$A\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}$$

на собственные числа λ и собственные векторы $\vec{\gamma}$ ($\vec{\gamma} \neq \vec{0}$). Ее решение сводится к системе

$$(A - \lambda E)\vec{\gamma} = 0,$$

которая имеет ненулевое решение, если ее определитель $\det(A-\lambda E) = |A-\lambda E|$ равен нулю. Таким образом, собственные числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, находятся из характеристического уравнения

$$|A-\lambda E| = 0,$$

а собственные векторы $\vec{\gamma}_i$ из систем

$$(A-\lambda_i E)\vec{\gamma}_i = 0.$$

В силу линейности системы дифференциальных уравнений ее общее решение имеет вид

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{\gamma}_i \, \mathrm{e}^{\lambda_i t},$$

где C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные постоянные.

П р и м е р ы

1) Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Матрица системы равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнения для нахождения собственных чисел λ

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решаем его, предварительно сделав замену $z = 2-\lambda$,

$$\begin{vmatrix} z & -1 & 1 \\ 1 & z & -1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = z^3 - z = 0, \quad z_1 = 1, \;\; z_2 = 0, \;\; z_3 = -1.$$

Так как $\lambda = 2 - z$, то

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Для каждого λ_i решаем систему $(A-\lambda_i E)\vec{\gamma}_i = 0$, которая в развернутой записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_i & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_i & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{i1} \\ \gamma_{i2} \\ \gamma_{i3} \end{pmatrix} = 0.$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \gamma_{11} - \gamma_{12} + \gamma_{13} = 0, \\ \gamma_{11} + \gamma_{12} - \gamma_{13} = 0, \\ \gamma_{11} - \gamma_{12} + \gamma_{13} = 0. \end{cases}$$

Ищем частное (наиболее простое) решение этой системы $\gamma_{11} = 0$, $\gamma_{12} = 1$, $\gamma_{13} = 1$. Таким образом, при $\lambda_1 = 1$ собственный вектор равен $\vec{\gamma}_1 = (0, 1, 1)$. Им соответствуют следующие фундаментальные решения:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \mathrm{e}^t, \quad z_1 = \mathrm{e}^t.$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0, \\ \gamma_{21} - \gamma_{23} = 0, \\ \gamma_{21} - \gamma_{22} = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем $\gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_{23} = 1$. При $\lambda_2 = 2$ собственный вектор равен $\vec{\gamma}_2 = (1, 1, 1)$. Фундаментальные решения равны:

$$x_2 = \mathrm{e}^{2t}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{2t}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{2t}.$$

$\underline{\lambda_3 = 3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -\gamma_{31} - \gamma_{32} + \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{31} - \gamma_{32} - \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{31} - \gamma_{32} - \gamma_{33} = 0. \end{cases}$$

Имеем $\gamma_{32} = 0$, $\gamma_{31} = \gamma_{33} = 1$. В этом случае $\lambda_3 = 3$, $\vec{\gamma}_3 = (1, 0, 1)$,

$$x_3 = \mathrm{e}^{3t}, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = \mathrm{e}^{3t}.$$

Составляя решения по формулам

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\ x = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3, \end{cases}$$

получаем ответ для системы:

$$\begin{cases} x = C_2 \,\mathrm{e}^{2t} + C_3 \,\mathrm{e}^{3t}, \\ y = C_1 \,\mathrm{e}^{t} + C_2 \,\mathrm{e}^{2t}, \\ x = C_1 \,\mathrm{e}^{t} + C_2 \,\mathrm{e}^{2t} + C_3 \,\mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$$

2) Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = x + 2y + 2z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Матрица этой системы равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные числа

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 5 = 0, \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm i.$$

Ищем собственные векторы

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \gamma_{11} - 4\gamma_{12} + \gamma_{13} = 0, \\ \gamma_{11} + \gamma_{13} = 0, \\ \gamma_{11} + 2\gamma_{12} + \gamma_{13} = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем $\lambda_1 = 1$, $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{13} = -1$,

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{\gamma}_1 = (1, 0, -1),$$

$$x_1 = \mathrm{e}^t, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = -\mathrm{e}^t.$$

$\underline{\lambda_2 = 2 + i}$

$$\begin{pmatrix} -i & -4 & 1 \\ 1 & -1-i & -i \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -i\gamma_{21} - 4\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0, \\ \gamma_{21} - (1+i)\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0, \\ \gamma_{21} + 2\gamma_{22} - i\gamma_{23} = 0. \end{cases}$$

Решим, например, второе и третье уравнение относительно переменных γ_{21} и γ_{23}.

Имеем

$$\begin{cases}\gamma_{21}+\gamma_{23}=(1+i)\gamma_{22},\\ -\gamma_{21}+i\gamma_{23}=2\gamma_{22},\end{cases}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & i\end{vmatrix}=1+i,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}(1+i)\gamma_{22} & 1\\ 2\gamma_{22} & i\end{vmatrix}=(-3+i)\gamma_{22},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & (1+i)\gamma_{22}\\ -1 & 2\gamma_{22}\end{vmatrix}=(3+i)\gamma_{22},$$

$$\gamma_{21}=\frac{(-3+i)\gamma_{22}}{1+i}=(-1+2i)\gamma_{22}, \quad \gamma_{23}=\frac{(3+i)\gamma_{22}}{1+i}=(2-i)\gamma_{22}.$$

Полагая $\gamma_{22}=1$, получаем собственный вектор

$$\vec{\gamma}_2=(-1+2i,\ 1,\ 2-i).$$

Отметим, что существует другой способ отыскания частного решения системы

$$\begin{cases}-i\gamma_{21}-4\gamma_{22}+\gamma_{23}=0,\\ \gamma_{21}-(1+i)\gamma_{22}+\gamma_{23}=0,\\ \gamma_{21}+2\gamma_{22}-i\gamma_{23}=0.\end{cases}$$

Ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} -i & -4 & 1\\ 1 & -1-i & -i\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Используя правило Лапласа, раскладываем его по первой строке

$$-i\begin{vmatrix} -1-i & 1\\ 2 & -i\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -i & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1-i\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0,$$
$$-i(-3+i)-4(1+i)+(3+i)=0.$$

Сравнивая последнее равенство с первым уравнением системы, заключаем, что собственный вектор равен с точностью до постоянного множителя алгебраическим дополнениям первой строки, приведенного выше определителя (или соответствующей ему матрицы)

$$\vec{\gamma}=(-3+i,\ 1+i,\ 3+i).$$

Поскольку собственный вектор ищется с точностью до постоянного множителя, то, поделив координаты вектора $\vec{\gamma}=(-3+i,\ 1+i,\ 3+i)$ на число $1+i$, получим, тот же результат, что и ранее

$$\vec{\gamma}_2=(-1+2i,\ 1,\ 2-i).$$

Запишем комплексное фундаментальное решение, соответствующее комплексному собственному значению

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2&=(-1+2i)\,\mathrm{e}^{(2+i)t}=(-1+2i)\,\mathrm{e}^{2t}(\cos t+i\sin t),\\ \tilde{y}_2&=\mathrm{e}^{(2+i)t}=\ \mathrm{e}^{2t}(\cos t+i\sin t),\\ \tilde{z}_2&=(2-i)\,\mathrm{e}^{(2+i)t}=(2-i)\,\mathrm{e}^{2t}(\cos t+i\sin t).\end{aligned}$$

Записав действительные и мнимые части этих решений, получим фундаментальные решения, соответствующие комплексно-сопряженным корням $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$:

$$x_2 = \mathrm{e}^{2t}(-\cos t - 2\sin t), \quad y_2 = \mathrm{e}^{2t}\cos t, \quad z_2 = \mathrm{e}^{2t}(2\cos t + \sin t),$$
$$x_3 = \mathrm{e}^{2t}(2\cos t - \sin t), \quad y_3 = \mathrm{e}^{2t}\sin t, \quad z_3 = \mathrm{e}^{2t}(-\cos t + 2\sin t).$$

Используя формулы

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3, \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \\ x = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3, \end{cases}$$

после простых преобразований получаем ответ

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{2t}((2C_3 - C_2)\cos t - (2C_2 + C_3)\sin t), \\ y = C_1\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t}(C_2\cos t + C_3\sin t), \\ z = -C_1\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t}((2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t). \end{cases}$$

3) Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Матрица этой системы равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные числа

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -(2+\lambda) & -3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -(2+\lambda) \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0, \quad -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Ищем собственные векторы

$\underline{\lambda_1 = 0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\gamma_{11} - \gamma_{12} - \gamma_{13} = 0, \\ 3\gamma_{11} - 2\gamma_{12} - 3\gamma_{13} = 0, \\ -\gamma_{11} + \gamma_{12} + 2\gamma_{13} = 0. \end{cases}$$

Вычисляя алгебраические дополнения первой строки определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

получаем частное решение системы $\gamma_{11} = -1$, $\gamma_{12} = -3$, $\gamma_{13} = 1$. В качестве координат вектора $\vec{\gamma}_2$ возьмем эти решения с противоположным знаком.

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{\gamma}_1 = (1, 3, -1),$$
$$x_1 = \mathrm{e}^{0t}, \quad y_1 = 3\,\mathrm{e}^{0t}, \quad z_1 = -\,\mathrm{e}^{0t},$$
$$x_1 = 1, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = -1.$$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_{21} - \gamma_{22} - \gamma_{23} = 0,$$

В этом случае для системы выполняется условие

$$n - m = r \quad (3 - 2 = 1),$$

где $n = 3$ — порядок системы, $m = 2$ — кратность корня, $r = 1$ — ранг системы, и у нее можно найти фундаментальное решение. Полагая $\gamma_{21} = \gamma_{22} + \gamma_{23}$, строим фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений

	γ_{21}	γ_{22}	γ_{23}
$\vec{\gamma}_2$	1	1	0
$\vec{\gamma}_3$	1	0	1

Каждый вектор $\vec{\gamma}_2$ и $\vec{\gamma}_3$ задает соответствующие фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений

$$x_2 = \mathrm{e}^{t}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{t}, \quad z_2 = 0,$$
$$x_3 = \mathrm{e}^{t}, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = \mathrm{e}^{t}.$$

Теперь можем записать ответ решаемой системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x = C_1 + (C_2 + C_3)\,\mathrm{e}^{t}, \\ y = 3C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{t}, \\ z = -C_1 + C_3\,\mathrm{e}^{t}. \end{cases}$$

4) Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 5z, \\ \dot{y} = 6x - y - 6z, \\ \dot{z} = -8x + 3y + 9z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Матрица системы равна

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & -6 \\ -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ищем решения, соответствующие этим корням.

$\underline{\lambda_1 = 2}$

Система для нахождения собственного вектора имеет вид

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = 0.$$

Для нахождения вектора $\vec{\gamma}_1$ вычислим алгебраические дополнения элементов первой строки определителя этой системы

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Получим

$$\gamma_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3, \quad \gamma_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = 6,$$
$$\gamma_{13} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

или (сократив на -3) $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{12} = -2$, $\gamma_{13} = 2$.

Итак,

$$\lambda_1 = 2, \quad \vec{\gamma}_1 = (1, -2, 2),$$
$$x_1 = \mathrm{e}^{2t}, \quad y_1 = -2\,\mathrm{e}^{2t}, \quad z_1 = 2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 1}$

Имеем

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = 0.$$

Легко видеть, что в этом случае $n = 3$, $m = 2$, $r = 2$ и $n - m \neq r$. В отличие от предыдущего примера решение, соответствующее $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, ищем методом неопределенных коэффициентов.

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^t, \quad y = (C + Dt)\,\mathrm{e}^t, \quad z = (E + Ft)\,\mathrm{e}^t.$$

Подставляя предполагаемые решения в систему дифференциальных уравнений и сокращая на e^t, имеем

$$\begin{aligned}
A + B + Bt &= -4A - 4Bt + 2C + 2Dt + 5E + 5Ft,\\
C + D + Dt &= 6A + 6Bt - C - Dt - 6E - 6Ft,\\
E + F + Ft &= -8A - 8Bt + 3C + 3Dt + 9E + 9Ft.
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}
-5B + 2D + 5F = 0,\\
6B - 2D - 6F = 0,\\
-8B + 3D + 8F = 0,\\
-5A - B + 2C + 5E = 0,\\
6A - 2C - D - 6E = 0,\\
-8A + 3C + 8E - F = 0.
\end{cases}$$

Положим $E = C_2$, $F = C_3$, где C_2 и C_3 — произвольные постоянные. Тогда $B = C_3$, $D = 0$, $A = C_2 + C_3$, $C = 3C_3$ и решение соответствующее кратным корням $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, имеет вид

$$x = (C_2 + C_3 + C_3 t)\,\mathrm{e}^t, \quad y = 3C_3\,\mathrm{e}^t, \quad z = (C_2 + C_3 t)\,\mathrm{e}^t.$$

Теперь нетрудно составить общее решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}
x = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + (C_2 + C_3 + C_3 t)\,\mathrm{e}^t,\\
y = -2C_1\,\mathrm{e}^{2t} + 3C_3\,\mathrm{e}^t,\\
z = 2C_1\,\mathrm{e}^{2t} + (C_2 + C_3 t)\,\mathrm{e}^t.
\end{cases}$$

Задачи для практических занятий

13.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y,\\ \dot{y} = x + y - z,\\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$.

13.2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z,\\ \dot{y} = x + y,\\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

13.3. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$
$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$.

13.4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y. \end{cases}$
$(\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

Домашнее задание

13.5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$
$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$.

13.6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x. \end{cases}$
$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$.

13.7. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$
$(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

13.8. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z. \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

Ответы:

13.1. $x = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{-t}$, $y = C_1\,\mathrm{e}^t - 3C_3\,\mathrm{e}^{-t}$, $z = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{2t} - 5C_3\,\mathrm{e}^{-t}$. **13.2.** $x = \mathrm{e}^t(-2C_2\sin 2t + 2C_3\cos 2t)$, $y = C_1\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t(C_2\cos 2t + C_3\sin 2t)$, $z = -C_1\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t(3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t)$. **13.3.** $x = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + (C_2 + C_3)\,\mathrm{e}^{3t}$, $y = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t}$, $z = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{3t}$. **13.4.** $x = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t + C_3\,\mathrm{e}^{2t}$, $y = (C_1 - 2C_2 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t$, $z = (C_1 - C_2 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t + C_3\,\mathrm{e}^{2t}$. **13.5.** $x = C_1 + 3C_2\,\mathrm{e}^{2t}$, $y = -2C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{-t}$, $z = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2t} - 2C_3\,\mathrm{e}^{-t}$. **13.6.** $x = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t}(C_2\cos t + C_3\sin t)$, $y = \mathrm{e}^{3t}((C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t)$, $z = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t}((2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t)$. **13.7.** $x = C_1\,\mathrm{e}^{3t} + (C_2 - 2C_3)\,\mathrm{e}^{-t}$, $y = -C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}$, $z = -3C_1\,\mathrm{e}^{3t} + C_3\,\mathrm{e}^{-t}$. **13.8.** $x = (C_2 + C_3 t)\,\mathrm{e}^{-t}$, $y = 2C_1\,\mathrm{e}^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3 t)\,\mathrm{e}^{-t}$, $z = C_1\,\mathrm{e}^t - (C_2 + C_3 + C_3 t)\,\mathrm{e}^{-t}$.

Занятие 14. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Не вдаваясь в подробности исследований сходимости рядов и существования решения, покажем этот метод на примерах.

П р и м е р ы

1) Для уравнения

$$(1 - x^2)y'' - xy' - y = 0$$

найти линейно-независимые решения (фундаментальную систему) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в виде степенных рядов по степеням x и построить общее решение.

Р е ш е н и е. Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

Тогда

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Подставляем выражения для y, y' и y'' через ряды в уравнение.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Для удобства "подравняем" показатели степеней у переменной x. С этой целью заменим индекс суммирования в первой сумме, полагая $k-2=m$, а в остальных суммах положим $k=m$.

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^m -$$
$$- \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0.$$

Выписывая коэффициенты при одинаковых степенях и приравнивая их к нулю, получаем

$$\begin{aligned} &x^0: \ 1 \cdot 2c_2 - c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{c_0}{2!}, \\ &x^1: \ 2 \cdot 3c_3 - c_1 - c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{2c_1}{3!}, \\ &x^m: \ (m+2)(m+1)C_{m+2} - m(m-1)c_m - mc_m - c_m = 0 \quad (m \geq 2). \end{aligned}$$

Из последнего равенства выводим рекуррентное соотношение

$$c_{m+2} = \frac{1+m^2}{(m+1)(m+2)}\, c_m \quad (m \geq 2).$$

1. Для нахождения решения $y_1(x)$ положим $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Тогда

$$c_3 = c_5 = \cdots = c_{2m+1} = \cdots = 0$$

в силу рекуррентного соотношения. Далее имеем (снова используя рекуррентное соотношение)

$$c_2 = \frac{1}{2!}, \quad c_4 = \frac{1+2^2}{3 \cdot 4}\, c_2 = \frac{1+2^2}{4!},$$
$$c_6 = \frac{1+4^2}{5 \cdot 6}\, c_4 = \frac{(1+2^2)(1+2^4)}{6!}, \ldots$$

Таким образом,

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1+2^2}{4!}\,x^4 + \frac{(1+2^2)(1+2^4)}{6!}x^6 + \cdots$$

2. Для нахождения решения $y_2(x)$ положим $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Тогда

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = c_{2m} = \cdots = 0,$$

$$c_3 = \frac{2}{3!}, \quad c_5 = \frac{1+3^2}{4\cdot 5}\,c_3 = \frac{2(1+3^2)}{5!},$$

$$c_7 = \frac{1+5^2}{6\cdot 7}\,c_5 = \frac{2(1+3^2)(1+5^2)}{7!},$$

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3!}\,x^3 + \frac{2(1+3^2)}{5!}\,x^5 + \frac{2(1+3^2)(1+5^2)}{7!}x^7 + \cdots$$

3. Общим решением уравнения будет

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

2) С помощью степенных рядов найти фундаментальную систему решений уравнения

$$x^2 y'' - x^2 y' + (x-2)y = 0.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение имеет особенность в точке $x = 0$. Поэтому его решение будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

где показатель σ подлежит определению. Имеем

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\sigma}, \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\sigma) c_k x^{k+\sigma-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\sigma)(k+\sigma-1) c_k x^{k+\sigma-2}.$$

Подставляем эти выражения для y, y' и y'' в уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\sigma)(k+\sigma-1) c_k x^{k+\sigma} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+\sigma) c_k x^{k+\sigma+1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\sigma+1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2 c_k x^{k+\sigma} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+\sigma)(k+\sigma-1) - 2] c_k x^{k+\sigma} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+\sigma-1) c_k x^{k+\sigma+1} = 0.$$

Заменим в первой сумме k на m, а во второй положим $k+1=m$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+\sigma)(m+\sigma-1)-2]c_m x^{m+\sigma}-\sum_{m=1}^{\infty}(m+\sigma-2)c_{m-1}x^{m+\sigma}=0.$$

Откуда следует

$$(\sigma(\sigma-1)-2)c_0=0,$$
$$[(m+\sigma)(m+\sigma-1)-2]c_m=(m+\sigma-2)c_{m-1}.$$

Полагая в первом равенстве $c_0=1$, находим показатели $\sigma=2$ и $\sigma=-1$. Второе равенство будем использовать как рекуррентное.

При $\sigma=2$ из рекуррентного равенства получаем

$$c_m=\frac{c_{m-1}}{m+3}.$$

Откуда последовательно находим

$$c_0=1,\quad c_1=\frac{1}{4},\quad c_2=\frac{1}{4\cdot 5},\quad c_3=\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\ \text{ и т.д.}$$

Таким образом,

$$y_1(x)=x^2\left(1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4\cdot 5}+\frac{x^3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right).$$

При $\sigma=-1$ рекуррентное равенство принимает вид

$$m(m-3)c_m=(m-3)c_{m-1}.$$

Если $m\neq 3$, то оно превращается в рекуррентное соотношение

$$c_m=\frac{c_{m-1}}{m}.$$

Откуда следует

$$c_0=c_1=1,\quad c_2=\frac{1}{2}.$$

При $m=3$ выполняется тождество $m(m-3)c_m=(m-3)c_{m-1}$. Поэтому в качестве коэффициента c_3 можно взять любое значение. Полагая $c_3=0$, из рекуррентного соотношения получаем, что $c_m=0$ для всех $m\geq 3$. В этом случае

$$y_2(x)=\frac{1}{x}\left(1+x+\frac{x}{2}\right).$$

Подстановкой в уравнение убеждаемся, что это будет второе фундаментальное решение.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Задачи для практических занятий

Найти линейно независимые решения каждого из данных уравнений в виде степенных рядов.

14.1. $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

14.2. $(1-x)y'' - 2y' + y = 0.$

14.3. $y'' + y\sin x = 0.$

Найти линейно независимые решения следующих уравнений в виде обобщенных степенных рядов.

14.4. $xy'' + 2y' + xy = 0.$

14.5. $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0.$

Домашнее задание

Найти линейно независимые решения каждого из данных уравнений в виде степенных рядов.

14.6. $y'' - xy' - 2y = 0.$

14.7. $(x^2+1)y'' + 5xy' + 3y = 0.$

14.8. $xy'' + y\ln(1-x) = 0.$

Найти линейно независимые решения в виде обобщенных степенных рядов.

14.9. $9x^2y'' - (x^2-2)y = 0.$

Ответы:

14.1. $y_1 = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$, $y_2 = x + x^3 + x^5 + \cdots = \dfrac{x}{1-x^2}$. **14.2.** $y_1 = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{11}{24}x^4 - \cdots$, $y_2 = x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + \dfrac{3}{4}x^4 + \cdots$. **14.3.** $y_1 = 1 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + \cdots$, $y_2 = x - \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{180}x^6 + \cdots$. **14.4.** $y_1 = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \cdots = \dfrac{\sin x}{x}$, $y_2 = x^{-1}\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots\right) = \dfrac{\cos x}{x}$. **14.5.** $y_1 = x^{-1}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, $y_2 = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \dfrac{2}{5}x + \dfrac{(2x)^2}{2\cdot 7} + \dfrac{(2x)^3}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots\right)$. **14.6.** $y_1 = 1 + \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{x^4}{1\cdot 3} + \dfrac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$, $y_2 = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{2\cdot 4} + \dfrac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$. **14.7.** $y_1 = 1 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^4 - \dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots$, $y_2 = x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4\cdot 6}{3\cdot 5}x^5 - \dfrac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}x^7 + \cdots$. **14.8.** $y_1 = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{5}{72}x^6 + \cdots$, $y_2 = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + \cdots$. **14.9.** $y_1 = x^{-\frac{5}{3}}\left(x^2 + \dfrac{x^4}{5\cdot 6} + \dfrac{x^6}{5\cdot 6\cdot 11\cdot 12} + \cdots\right)$, $y_2 = x^{-\frac{4}{3}}\left(x^2 + \dfrac{x^4}{6\cdot 7} + \dfrac{x^6}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13} + \cdots\right)$.